

# Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable y transiente

Pedro Infante Moreira

Tomo 4



ESPOCH  
2016





# Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable y transiente

---



# Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable y transiente

---

Tomo 4

Pedro Infante Moreira



**Solucionario de circuitos eléctricos  
en estado estable y transiente**

© 2016 Pedro Infante Moreira

© 2016 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

**Aval ESPOCH**

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego  
(*peer review*).

**Corrección y diseño:**

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa  
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable y transiente. Tomo 4.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2016

115 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-14-322-8

1. Circuitos eléctricos
2. Circuitos en estado estable
3. Circuitos acoplados
4. Electricidad
5. Magnetismo

## CONTENIDO TOMO 4

Capítulo 3. Circuitos RLC en paralelo sin fuentes .....	9
Problemas resueltos (4 al 19) .....	9
Capítulo 4. Aplicación y transformación de Laplace .....	67
Problemas resueltos (1 al 4) .....	67
Capítulo 5. Polos y ceros de una función .....	83
Problemas resueltos (1 al 7) .....	83
Capítulo 6. Parámetros de dos puertos .....	95
Problemas resueltos (1 al 2) .....	95
Capítulo 7. Gráficas de las respuestas de frecuencia .....	103
Problemas resueltos (1 al 9) .....	103
Bibliografía .....	115



## CAPÍTULO 3

### CIRCUITOS RLC EN PARALELO SIN FUENTES

#### Problemas Resueltos

**Problema 4:** Calcular la corriente  $i(t)$  del problema 3, utilizando otro método.

*Solución:*

En el problema 3, se dispone de los siguientes datos:

$$L = (1/32) \text{ H}$$

$$v(t) = 20e^{-400t} + 20e^{-1600t} \text{ V}$$

$$i(0) = -2 \text{ A}$$

Por definición, el voltaje en el inductor es:

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\int_0^t di = \int_0^t \frac{1}{L} v_L dt$$

$$i(t) - i(0) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt + i(0)$$

$$v_L = v_C = v(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0)$$

$$i(t) = \frac{1}{\frac{1}{32}} \int_0^t (20e^{-400t} + 20e^{-1600t}) dt + i(0)$$

$$i(t) = 32 \left\{ \left[ \frac{20}{-400} e^{-400t} \right]_0^t + \frac{20}{-1600} e^{-1600t} \Big|_0^t \right\} + i(0)$$

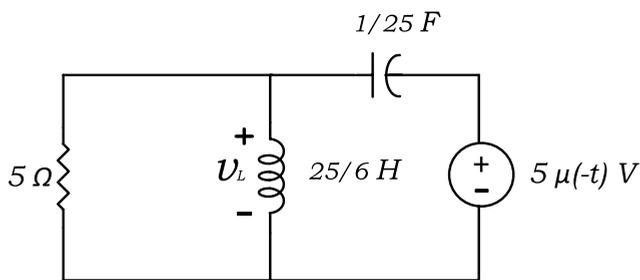
$$i(t) = 32 \{ [-0.05(e^{-400t} - 1)] - [0.0125(e^{-1600t} - 1)] \} + i(0)$$

$$i(t) = -1.6(e^{-400t} - 1) - 0.4(e^{-1600t} - 1) + (-2)$$

$$i(t) = -1.6e^{-400t} + 1.6 - 0.4e^{-1600t} + 0.4 - 2$$

$$i(t) = -1.6e^{-400t} - 0.4e^{-1600t} \text{ A}$$

**Problema 5:** “Obtégase  $v_L(t)$  para el circuito mostrado en la figura 3.3” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 234).



**Figura 3.3**

Para  $t < 0$ , en la figura 3.3, la función escalón unitario vale uno, en-

tonces,  $5\mu(-t) = 5V$ , debido al estado estable del circuito y a la fuente independiente de voltaje de  $5 V$  de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.4. A continuación se plantean las ecuaciones:

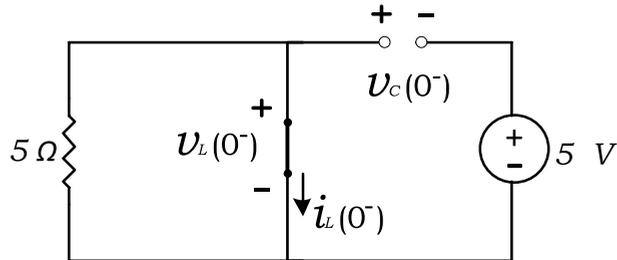


Figura 3.4

$$v_c(0^-) = -5 V$$

$$i_L(0^-) = 0$$

$$v_L(0^-) = 0$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.3, la función escalón unitario vale cero, entonces,  $5\mu(-t) = 0$ , como resultado se tiene el circuito de la figura 3.5. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(5)\frac{1}{25}} = 2.5$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{25}{6}\right)\left(\frac{1}{25}\right)}} = 2.45$$

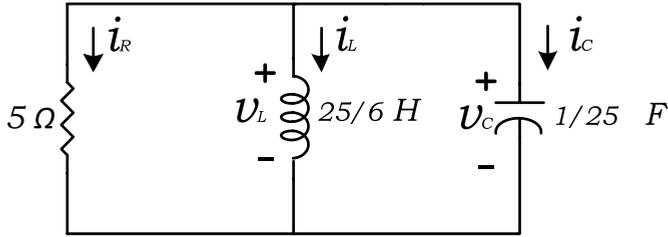


Figura 3.5

$\alpha > W_0$ , entonces es un circuito sobre amortiguado.

La ecuación de voltaje es:

$$v_c(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - W_0^2} = -2.5 + \sqrt{(2.5)^2 - (2.45)^2} = -2$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W_0^2} = -2.5 - \sqrt{(2.5)^2 - (2.45)^2} = -3$$

$$v_c(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 5$$

$$v_c(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = 5$$

$$A_1 + A_2 = 5$$

(3-16)

$$\frac{dv_c}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -2A_1 e^0 - 3A_2 e^0$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -2A_1 - 3A_2 \quad (3-17)$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i_c}{C}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} \quad (3-18)$$

En el nodo superior de la figura 3.5, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$i_R + i_L + i_c = 0$$

$$i_R(0^+) + i_L(0^+) + i_c(0^+) = 0$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_c(0^+)}{R} = \frac{5}{5} = 1$$

$$i_R(0^+) = 1A$$

$$i_c(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_c(0^+) = -1 - 0 = -1$$

$$i_c(0^+) = -1$$

Reemplazando en la ecuación (3-18):

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{-1}{\frac{1}{25}} = -25$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -25 \quad (3-19)$$

La ecuación (3-17) = (3-19):

$$-2A_1 - 3A_2 = -25$$

$$2A_1 + 3A_2 = 25 \quad (3-20)$$

De la ecuación (3-16):

$$A_1 = 5 - A_2$$

Reemplazando en la ecuación (3-20):

$$2(5 - A_2) + 3A_2 = 25$$

$$10 - 2A_2 + 3A_2 = 25$$

$$A_2 = 15$$

$$A_1 = 5 - 15 = -10$$

$$A_1 = -10$$

$$v_c(t) = -10e^{-2t} + 15e^{-3t}$$

$$v_L(t) = v_c(t)$$

$$v_L(t) = 15e^{-3t} - 10e^{-2t} \quad \text{V}$$

**Problema 6:** “Para el circuito RLC de la figura 3.6, encuentrese  $i_R(t)$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 234).

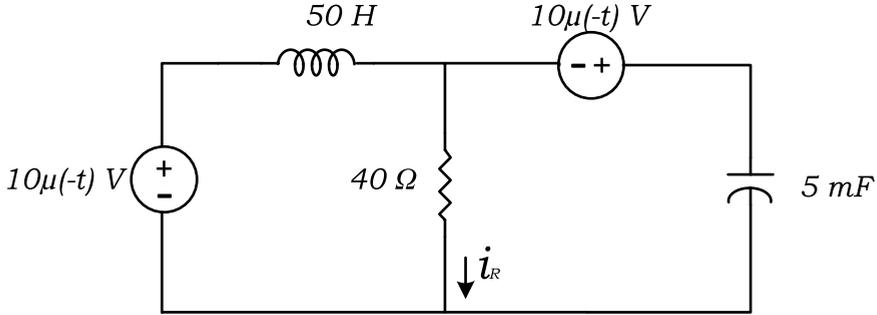


Figura 3.6

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.6, las dos funciones escalón unitario vale uno, entonces,  $10\mu(-t)V = 10\text{ V}$ , debido al estado estable del circuito y a las dos fuentes independientes de voltaje de 10 V de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.7. A continuación se plantean las ecuaciones:

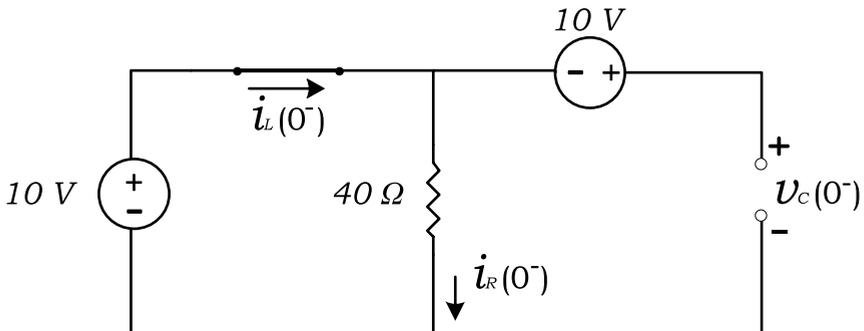


Figura 3.7

$$i_R(0^-) = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ A}$$

$$i_L(0^-) = i_R(0^-) = 0.25 \text{ A}$$

Aplicando la LVK en el LAZO externo de la figura 3.7, se tiene:

$$-v_c(0^-) + 10 + 10 = 0$$

$$-v_c(0^-) + 20 = 0$$

$$v_c(0^-) = 20 \text{ V}$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.6, las dos funciones escalón unitario valen cero, entonces,  $10\mu(-t)V = 0$ , como resultado se tiene el circuito de la figura 3.8. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ .

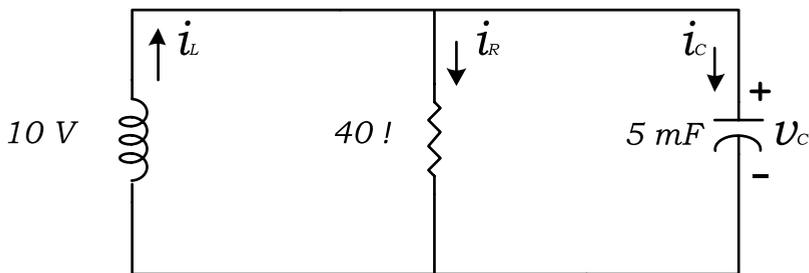


Figura 3.8

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(40)(5 \times 10^{-3})} = 2.5$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(50)(5 \times 10^{-3})}} = 2$$

$\alpha > W_0$  , entonces es un circuito sobre amortiguado.

La ecuación de voltaje es:

$$v_c(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - W_0^2} = -2.5 + \sqrt{(2.5)^2 - (2)^2} = -1$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W_0^2} = -2.5 - \sqrt{(2.5)^2 - (2)^2} = -4$$

$$v_c(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} \quad (3-21)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4 A_2 e^{-4t}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -A_1 e^0 - 4 A_2 e^0$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -A_1 - 4 A_2 \quad (3-22)$$

En el nodo superior de la figura 3.8, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$-i_L + i_R + i_C = 0$$

$$-i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.25 \text{ A}$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 20 \text{ V}$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_c(0^+)}{R} = \frac{20}{40} = 0.5 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = 0.5 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+)$$

$$i_C(0^+) = 0.25 - 0.5 = -0.25$$

$$i_C(0^+) = -0.25 \text{ A} \quad (3-23)$$

Por definición la corriente en el capacitor es:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{-0.25}{5 \times 10^{-3}} = -50$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = -50 \quad (3-24)$$

La ecuación (3-22) = (3-24):

$$-A_1 - 4A_2 = -50$$

$$A_1 + 4A_2 = 50 \quad (3-25)$$

De la ecuación (3-21):

$$v_C(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = 20$$

$$A_1 + A_2 = 20$$

$$A_1 = 20 - A_2$$

Reemplazar en la ecuación (3-25):

$$20 - A_2 + 4 A_2 = 50$$

$$3A_2 = 30$$

$$A_2 = 10$$

$$A_1 = 20 - 10$$

$$A_1 = 10$$

$$v_c(t) = 10e^{-t} + 10e^{-4t}$$

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{R} = \frac{10e^{-t} + 10e^{-4t}}{40} = 0.25e^{-t} + 0.25e^{-4t}$$

$$i_R(t) = (0.25e^{-t} + 0.25e^{-4t}) \mu(t) \text{ A}$$

**Problema 7:** “El interruptor en la figura 3.9 ha estado cerrado durante mucho tiempo. Determínese  $i_L(t)$  para todo  $t$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 234).

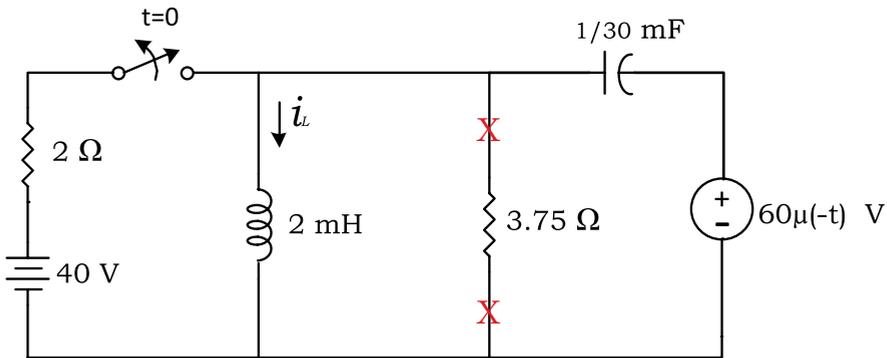


Figura 3.9

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.9, la función escalón unitario vale uno, esto es,  $60\mu(-t) = 60V$ , el interruptor está cerrado, debido al estado estable del circuito y a las fuentes independientes de voltaje de 40 V y 60 V de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.10. A continuación se plantean las ecuaciones:

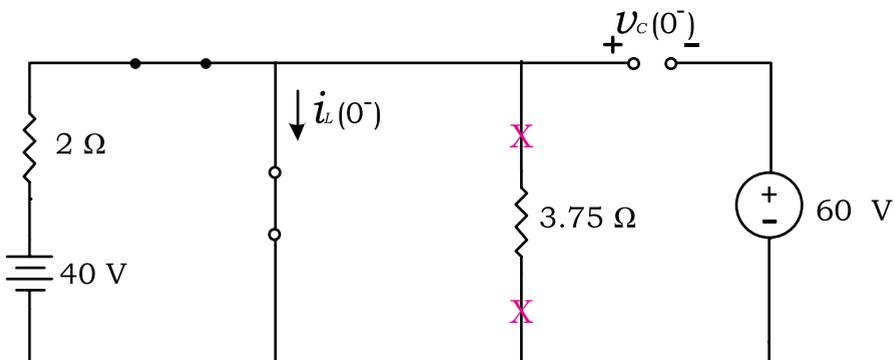


Figura 3.10

$$v_c(0^-) = -60 \text{ V}$$

En el lazo izquierdo de la figura 3.10, se aplica la LVK:

$$-40 + 2 i_L(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = \frac{40}{2} = 20$$

$$i_L(0^-) = 20 \text{ A}$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.9, la función escalón unitario vale cero, entonces,  $60\mu(-t)\text{V} = 0$ ; el interruptor está abierto, como resultado se tiene el circuito de la figura 3.11. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ .

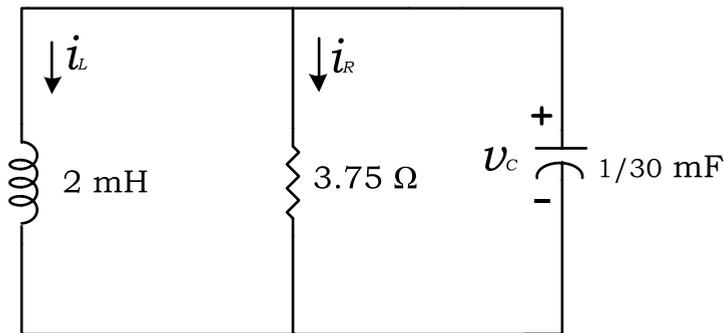


Figura 3.11

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(3.75) \left(\frac{1}{30} \times 10^{-3}\right)} = 4000$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{30} \times 10^{-3}\right)}} = 3872.98$$

$\alpha > W_0$  , entonces es un circuito sobre amortiguado.

La ecuación de voltaje es:

$$v_c(t) = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t}$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = -60 \text{ V}$$

$$v_c(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = -60$$

$$A_1 + A_2 = -60 \quad (3-26)$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - W_0^2} = -4000 + \sqrt{(4000)^2 - (3872.98)^2} = -2999.99$$

$$S_1 = -3000$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W_0^2} = -4000 - \sqrt{(4000)^2 - (3872.98)^2} = -5000$$

$$S_2 = -5000$$

$$v_c(t) = A_1 e^{-3000t} + A_2 e^{-5000t} \quad (3-27)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -3000 A_1 e^{-3000t} - 5000 A_2 e^{-5000t}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -3000 A_1 e^0 - 5000 A_2 e^0$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -3000 A_1 - 5000 A_2 \quad (3-28)$$

En el nodo superior de la figura 3.11, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tie-

nen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$i_L + i_R + i_C = 0$$

$$i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) \quad (3-29)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 20 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{R} = \frac{-60}{3.75} = -16 \text{ A}$$

Reemplazando en la ecuación (3-29):

$$i_C(0^+) = -20 - (-16) = -20 + 16$$

$$i_C(0^+) = -4 \text{ A}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{-4}{\frac{1}{30} \times 10^{-3}} = -120\,000$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = -120\,000 \quad (3-30)$$

$$(3-28) = (3-30)$$

$$-3000 A_1 - 5000 A_2 = -120\,000$$

$$3 A_1 + 5 A_2 = 120 \quad (3-31)$$

De la ecuación (3-26):

$$A_1 = -60 - A_2$$

Reemplazar en la ecuación (3-31):

$$3(-60 - A_2) + 5 A_2 = 120$$

$$-180 - 3 A_2 + 5 A_2 = 120$$

$$2 A_2 = 300$$

$$A_2 = 150$$

$$A_1 = -60 - 150$$

$$A_1 = -210$$

$$v_c(t) = -210e^{-3000t} + 150e^{-5000t} \text{ V}$$

Por definición el voltaje en el inductor es:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\int_0^t di_L = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt$$

$$i_L(t) - i_L(0) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt + i_L(0)$$

$$v_L = v_C = -210 e^{-3000t} + 150 e^{-5000t}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C dt + i_L(0)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \int_0^t [-210 e^{-3000t} + 150 e^{-5000t}] dt + i_L(0)$$

$$i_L(t) = 500 \left\{ \left[ \frac{210}{3000} e^{-3000t} \right]_0^t + \left[ \frac{150}{-5000} e^{-5000t} \right]_0^t \right\} + i_L(0)$$

$$i_L(t) = 35(e^{-3000t} - e^0) - 15(e^{-5000t} - e^0) + 20$$

$$i_L(t) = 35 e^{-3000t} - 35 - 15 e^{-5000t} + 15 + 20$$

$$i_L(t) = 35 e^{-3000t} - 15 e^{-5000t} \text{ A}$$

**Problema 8:** calcular la corriente del inductor  $i_L(t)$  del problema 7, utilizando otro método.

*Solución:*

Por definición, la corriente en el capacitor es:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_C = \frac{1}{30} \times 10^{-3} \frac{d}{dt} (-210 e^{-3000t} + 150 e^{-5000t})$$

$$i_C = \frac{1}{30} \times 10^{-3} [-210(-3000)e^{-3000t} + 150(-5000)e^{-5000t}]$$

$$i_C = 21e^{-3000t} - 25e^{-5000t}$$

$$i_R = \frac{v_C}{R} = \frac{-210e^{-3000t} + 150e^{-5000t}}{3.75}$$

$$i_R = -56e^{-3000t} + 40e^{-5000t}$$

$$i_L + i_R + i_C = 0$$

$$i_L = -i_R - i_C$$

$$i_L = -(-56e^{-3000t} + 40e^{-5000t}) - (21e^{-3000t} - 25e^{-5000t})$$

$$i_L = 56e^{-3000t} - 40e^{-5000t} - 21e^{-3000t} + 25e^{-5000t}$$

$$i_L = 35e^{-3000t} - 15e^{-5000t} \text{ A}$$

**Problema 9:** “Después de haber estado abierto durante una hora, el interruptor en la figura 3.12 se cierra en  $t = 0$ . Encuéntrese  $v_c(t)$  para  $t > 0$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 235).

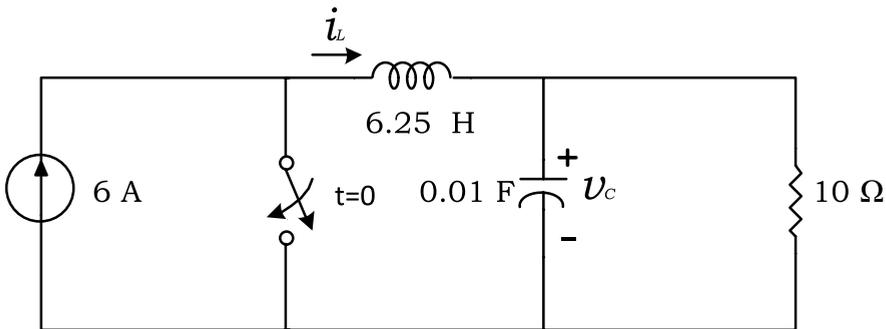
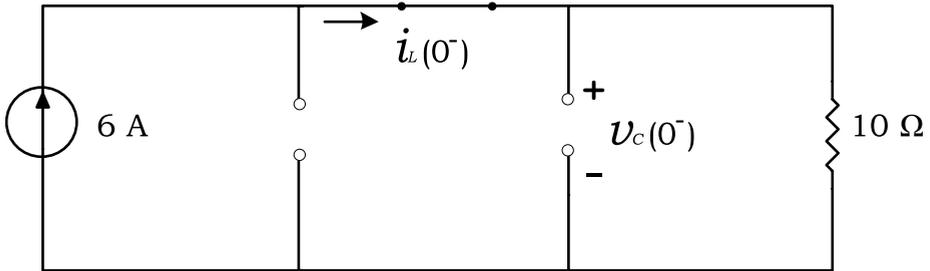


Figura 3.12

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.12 el interruptor está abierto, debido al estado estable del circuito y a la fuente independiente de corriente de 6 A de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.13. A continuación se plantean las ecuaciones:



**Figura 3.13**

$$i_L(0^-) = 6 \text{ A}$$

$$v_c(0^-) = 10 i_L(0^-) = 10(6) = 60 \text{ V}$$

$$v_c(0^-) = 60 \text{ V}$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.12, el interruptor está cerrado, como resultado se tiene el circuito de la figura 3.14. La fuente de corriente de 6 A circula por el cortocircuito; esta fuente no afecta al circuito de la derecha para los parámetros que se desea calcular, dando como resultado el circuito de la figura 3.15. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ .

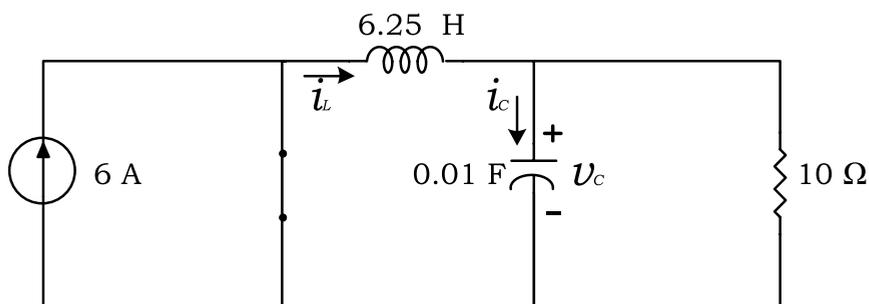


Figura 3.14

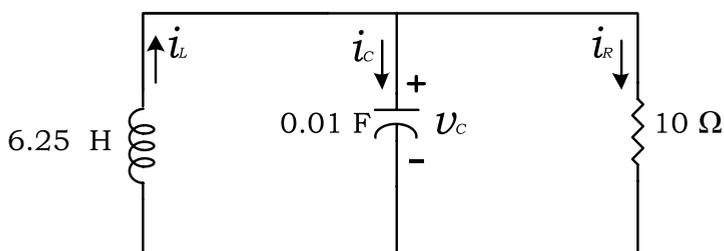


Figura 3.15

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(10)(0.01)} = 5$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(6.25)(0.01)}} = 4$$

$\alpha > w_0$ , entonces es un circuito sobre amortiguado.

La ecuación de voltaje es:

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -5 + \sqrt{5^2 - 4^2} = -2$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5 - \sqrt{5^2 - 4^2} = -8$$

$$v_c(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t} \quad (3-32)$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 60 \text{ V}$$

$$v_c(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = 60$$

$$A_1 + A_2 = 60 \quad (3-33)$$

En el nodo superior de la figura 3.15, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$-i_L + i_c + i_R = 0$$

$$-i_L(0^+) + i_c(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_c(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) \quad (3-34)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 6 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_c(0^+)}{R} = \frac{60}{10} = 6 \text{ A}$$

Reemplazando en la ecuación (3-34):

$$i_c(0^+) = 6 - 6 = 0 \text{ A}$$

$$i_c(0^+) = 0$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i_c}{C}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = 0$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3-35)$$

De la ecuación (3-32):

$$\frac{dv_c}{dt} = -2 A_1 e^{-2t} - 8 A_2 e^{-8t}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -2 A_1 e^0 - 8 A_2 e^0$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -2 A_1 - 8 A_2 \quad (3-36)$$

La ecuación (3-36) = (3-35):

$$-2 A_1 - 8 A_2 = 0$$

$$-2 A_1 = 8 A_2$$

$$A_1 = -4 A_2$$

En la ecuación (3-33):

$$A_1 + A_2 = 60$$

$$-4 A_2 + A_2 = 60$$

$$-3 A_2 = 60$$

$$A_2 = -\frac{60}{3} = -20$$

$$A_2 = -20$$

$$A_1 = -4 A_2 = 4(-20) = 80$$

$$A_1 = 80$$

$$v_c(t) = 80 e^{-2t} - 20 e^{-8t} \text{ V}$$

**Problema 10:** considerando el problema 9, calcúlese  $i_L(t)$  para  $t > 0$ .

*Solución:*

En la figura 3.15, el voltaje en el inductor es:

$$v_L = -L \frac{di_L}{dt}$$

$v_L = v_c(t)$  , debido a que están en paralelo.

$$\int_0^t di_L = -\frac{1}{L} \int_0^t v_c(t) dt$$

$$i_L(t) - i_L(0) = -\frac{1}{L} \int_0^t v_c(t) dt$$

$$i_L(t) = -\frac{1}{L} \int_0^t v_c(t) dt + i_L(0)$$

$$i_L(t) = -\frac{1}{6.25} \int_0^t (80 e^{-2t} - 20 e^{-8t}) dt + 6$$

$$i_L(t) = -\frac{1}{6.25} \left\{ \frac{80}{-2} e^{-2t} \Big|_0^t - \frac{20}{-8} e^{-8t} \Big|_0^t \right\} + 6$$

$$i_L(t) = -0.16 \{ [-40(e^{-2t} - e^0)] + 2.5[e^{-8t} - e^0] \} + 6$$

$$i_L(t) = 6.4(e^{-2t} - 1) + 0.4(e^{-8t} - 1) + 6$$

$$i_L(t) = 6.4 e^{-2t} - 6.4 + 0.4 e^{-8t} + 0.4 + 6$$

$$i_L(t) = 6.4 e^{-2t} - 0.4 e^{-8t}$$

**Problema 11:** considerando el problema 9, encuentrese el tiempo de asentamiento  $t_s$  para el voltaje en el capacitor  $v_c$ .

*Solución:*

En el problema 9, el voltaje en el capacitor es:

$$v_c(t) = 80 e^{-2t} - 20 e^{-8t}$$

Derivando el voltaje en el capacitor e igualando a cero, se obtiene el tiempo máximo  $t_m$ :

$$\frac{dv_c}{dt} = 80(-2)e^{-2t} - 20(-8)e^{-8t}$$

$$-160 e^{-2t_m} + 160 e^{-8t_m} = 0$$

$$160 e^{-8t_m} = 160 e^{-2t_m}$$

$$e^{-8tm} = e^{-2tm}$$

$$-8tm = -2tm$$

$$tm = 0$$

Reemplazando el tiempo máximo  $t_m$  en la ecuación de voltaje del capacitor, se tiene el voltaje máximo en el capacitor:

$$v_c(t_m) = 80 e^{-2tm} - 20 e^{-8tm}$$

$$v_c(t_m) = 80 e^0 - 20 e^0$$

$$v_c(t_m) = 80 - 20 = 60$$

$$v_c(t_m) = 60 \text{ Volt}$$

El tiempo de asentamiento  $t_s$  se obtiene tomando el 1 % del voltaje máximo, esto es:

$$1\% v_c(t_m) = 0.01(60) = 0.6 \text{ V}$$

$$0.6 = 80 e^{-2ts} - 20 e^{-8ts}$$

$$0.6 = 20 (4 e^{-2ts} - e^{-8ts})$$

$$\frac{0.6}{20} = 4 e^{-2ts} - e^{-8ts}$$

$$0.03 = 4 e^{-2ts} - e^{-8ts}$$

Despreciando al segundo término exponencial, debido a que este término se atenúa más rápido que el primero:

$$\frac{0.03}{4} = e^{-2ts}$$

$$\ln \frac{0.03}{4} = -2ts \ln e$$

$$ts = -\frac{\ln 7.5 \times 10^{-3}}{2} = 2.45 \text{ Seg.}$$

$$ts = 2.45 \text{ Seg.}$$

**Problema 12:** “Supóngase que el circuito de la figura 3.16 está críticamente amortiguado, con  $v(0) = 100 \text{ V}$  e  $i(0) = 4 \text{ A}$ . Entonces, si  $R = 10\alpha$  y  $\alpha = 100 \text{ Np/s}$ . a) Obténganse los valores de  $L$  y  $C$ ; b) encuéntrese  $v(t)$  para  $t > 0$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 235).

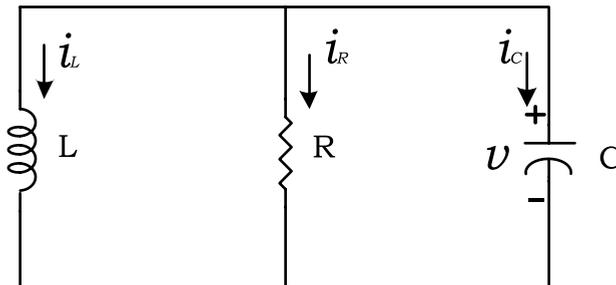


Figura 3.16

*Solución:*

De los datos del problema:

$$v(0) = 100 \text{ V}$$

$$i_L(0) = i(0) = 4 \text{ A}$$

$$R = 10 \, \Omega$$

$$\alpha = 100 \, \text{N}_p/\text{s}$$

De la ecuación del coeficiente de amortiguamiento exponencial:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

Se despeja el capacitor C:

$$C = \frac{1}{2R\alpha} = \frac{1}{2(10)(100)} = 5 \times 10^{-4} \, \text{F}$$

$$C = 500 \times 10^{-6} \, \text{F}$$

$$C = 500 \, \mu\text{f}$$

$\alpha = W_0$ , circuito críticamente amortiguado, por dato del problema.

$$W_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4R^2C^2} = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{1}{4R^2C} = \frac{1}{L}$$

$$L = 4R^2C$$

$$L = 4(10)^2(500 \times 10^{-6})$$

$$L = 0.2 \text{ H}$$

Para un circuito RLC en paralelo críticamente amortiguado, el voltaje viene dado por:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

$$v(t) = e^{-100t}(A_1 t + A_2)$$

$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = v(0) = 100 \text{ V}$ , debido a que el capacitor no permite cambios bruscos de voltaje.

$$v_c(0) = e^0[A_1(0) + A_2] = 100$$

$$A_2 = 100$$

$$v_c(t) = e^{-100t}(A_1 t + 100)$$

$$\frac{dv}{dt} = (-100)e^{-100t}(A_1 t + 100) + e^{-100t}(A_1)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = (-100)e^0[A_1(0) + 100] + e^0 A_1$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = (-100)(100) + A_1$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = A_1 - 10000 \tag{3-37}$$

En el nodo superior de la figura 3.16, se aplica la Ley de Corrientes

de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$i_L + i_R + i_C = 0$$

$$i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 4 \text{ A}$$

$$v_C(0^+) = v(0) = 100$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = 10 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = -4 - 10 = -14$$

$$i_C(0^+) = -14 \text{ A}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{-14}{500 \times 10^{-6}} = -28000$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = -28000 \quad (3-38)$$

La ecuación (3-37) = (3-38):

$$A_1 - 10000 = -28000$$

$$A_1 = -28000 + 10000 = -18000$$

$$b) v(t) = e^{-100t}(-18000t + 100) \text{ V}$$

**Problema 13:** “a) ¿Qué valor de R provocará un amortiguamiento crítico en el circuito mostrado en la figura 3.17? b) Usando este valor de R, calcúlese  $i_c(t)$  para  $t > 0$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 235).

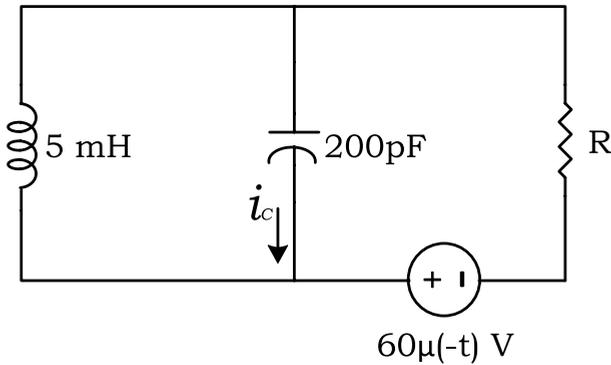


Figura 3.17

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.17, la función escalón unitario vale uno, esto es,  $60\mu(-t) = 60 \text{ V}$ . Debido al estado estable del circuito y a la fuente independiente de voltaje de 60 V de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.18. A continuación se plantean las ecuaciones:

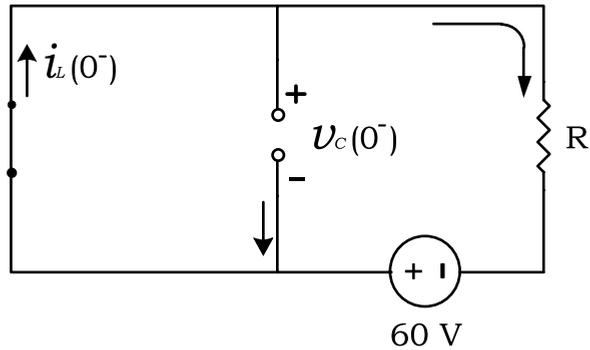


Figura 3.18

$$v_c(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = \frac{60}{R} \quad (3-39)$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.17, la función escalón unitario vale cero, esto es,  $60\mu(-t) = 0$ , como resultado se tiene el circuito de la figura 3.19. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ .

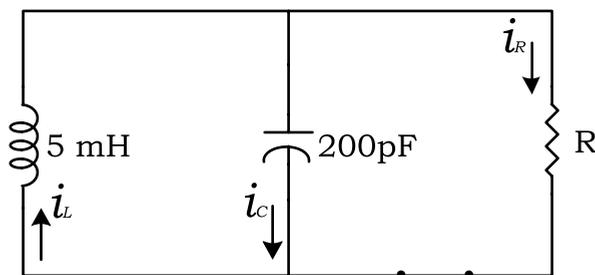


Figura 3.19

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$W_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\alpha = W_0$  , circuito críticamente amortiguado, por dato del problema.

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4R^2C^2} = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{1}{4R^2C} = \frac{1}{L}$$

$$L = 4R^2C$$

$$R^2 = \frac{L}{4C}$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{4C}}$$

$$R = \sqrt{\frac{5 \times 10^{-3}}{4(200 \times 10^{-12})}} = 2500 \text{ } \Omega$$

$$R = 2.5 \text{ K}\Omega$$

Reemplazando en la ecuación (3-39):

$$i_L(0^-) = \frac{60}{2500} = 0.024 \text{ A}$$

$$i_L(0^-) = 0.024 \text{ A}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(2500)(200 \times 10^{-12})} = 1\,000\,000$$

$$\alpha = 1\,000\,000 \text{ N}_p/\text{seg}$$

Para un circuito RLC en paralelo críticamente amortiguado, el voltaje viene dado por:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

$$v_c(t) = e^{-1000000t}(A_1 t + A_2)$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0$$

$$v_c(0) = e^0[A_1(0) + A_2] = 0$$

$$A_2 = 0$$

$$v_c(t) = e^{-1000000t}(A_1 t)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = (-1000000)e^{-1000000t}(A_1 t) + e^{-1000000t} A_1$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = (-1000000)e^0(0) + e^0 A_1 = A_1$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = A_1 \tag{3-40}$$

En el nodo superior de la figura 3.19, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$-i_L + i_C + i_R = 0$$

$$-i_L(0^+) + i_C(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.024 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{R} = \frac{0}{2500} = 0$$

$$i_C(0^+) = 0.024 - (0) = 0.024$$

$$i_C(0^+) = 0.0244 \text{ A}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{0.024}{200 \times 10^{-12}} = 12 \times 10^7$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = 12 \times 10^7 \quad (3-41)$$

La ecuación (3-40) = (3-41):

$$A_1 = 12 \times 10^7$$

$$v_C(t) = e^{-10^6 t} (12 \times 10^7 t)$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_C = 200 \times 10^{-12} [(-10^6)e^{10^6 t}(12 \times 10^7 t) + e^{-10^6 t} 12 \times 10^7]$$

$$i_C = -24000 t e^{-10^6 t} + 0.024 e^{-10^6 t}$$

$$i_C(t) = 0.024 e^{-10^6 t} - 24000 t e^{-10^6 t} \text{ A}$$

**Problema 14:** “Sean  $v(0) = 0$  e  $i(0) = 5$  A en el circuito mostrado en la figura 3.20. Si  $L = 0.1$  H,  $\omega_0 = 100$  rad/s y si el circuito está críticamente amortiguado, a) obténganse los valores de R y C; b) determínese  $v(t)$  para  $t > 0$ ; c) obténgase  $v_m$  y el instante  $t_m$  en el que ocurre” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 235).

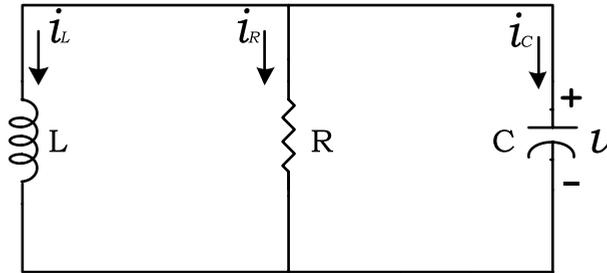


Figura 3.20

*Solución:*

$$L = 0.1 \text{ H}$$

$$\omega_0 = 100 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{W_0^2 L} = \frac{1}{(100)^2(0.1)} = 1 \times 10^{-3} \text{ F}$$

$$C = 1 \text{ mF}$$

$\alpha = W_0$ , circuito críticamente amortiguado por dato del problema.

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4 R^2 C^2} = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{1}{4 R^2 C} = \frac{1}{L}$$

$$R^2 = \frac{L}{4C}$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{4C}} = \sqrt{\frac{0.1}{4(1 \times 10^{-3})}} = 5 \Omega$$

$$R = 5 \Omega$$

Para un circuito RLC en paralelo críticamente amortiguado, el voltaje viene dado por:

$$b) v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(5)(1 \times 10^{-3})} = 100$$

$$v(t) = e^{-100t}(A_1 t + A_2)$$

$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = v(0) = 0$  , debido a que el capacitor no permite cambios bruscos de voltaje.

$$v(0) = e^0(A_1(0) + A_2) = 0$$

$$A_2 = 0$$

$$v(t) = e^{-100t}A_1t$$

$$\frac{dv}{dt} = (-100)e^{-100t}A_1t + A_1e^{-100t}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = (-100)e^0A_1(0) + A_1e^0 = A_1$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = A_1 \quad (3-42)$$

En el nodo superior de la figura 3.20, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$i_L + i_R + i_C = 0$$

$$i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = i(0) = 5 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = \frac{v(0^+)}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$i_C(0^+) = -5 - 0 = -5$$

$$i_C(0^+) = -5 \text{ A}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{5} = \frac{-5}{1 \times 10^{-3}} = -5000$$

$$v_C(t) = v(t)$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = -5000 \quad (3-43)$$

La ecuación (3-42) = (3-43).

$$A_1 = -5000$$

$$b) v(t) = e^{-100t}(-5000t)$$

$$c) \frac{dv}{dt} = (-100)e^{-100t}(-5000t) + e^{-100t}(-5000)$$

$$5 \times 10^5 e^{-100tm}tm - 5000 e^{-100tm} = 0$$

$$5000[100 e^{-100tm}tm - e^{-100tm}] = 0$$

$$100tm e^{-100tm} - e^{-100tm} = 0$$

$$100tm e^{-100tm} = e^{-100tm}$$

$$100tm = \frac{e^{-100tm}}{e^{-100tm}}$$

$$tm = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ Seg.}$$

$$tm = 0.01 \text{ Seg.}$$

$$v(tm) = e^{-100tm}(-5000tm)$$

$$v(tm) = -(5000)(0.01)e^{-100(0.01)}$$

$$v(tm) = -18.394 \text{ V}$$

**Problema 15:** “El interruptor que aparece en la figura 3.21 ha estado cerrado durante mucho tiempo. Obténgase  $i(t)$  después de que este se abre en  $t = 0$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 235).

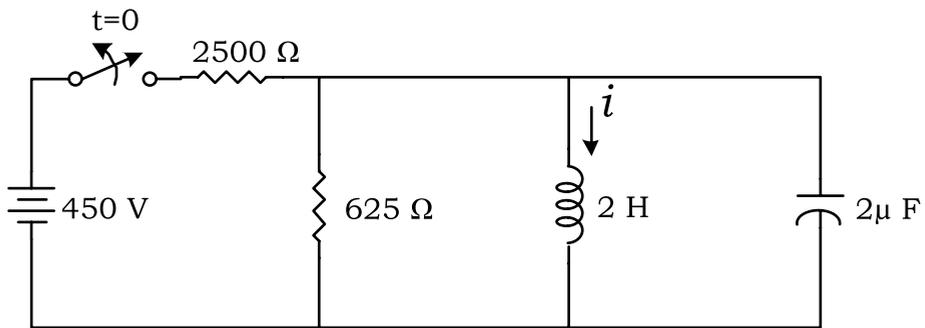


Figura 3.21

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.21, el interruptor está cerrado. debido al estado estable del circuito y a la fuente independiente de voltaje de 450 V de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.22. La resistencia de 625 Ω se abre debido a que está en paralelo con el cortocircuito. A continuación se plantean las ecuaciones:

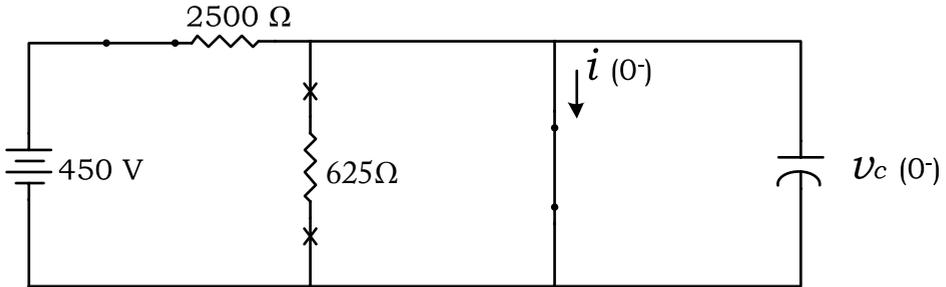


Figura 3.22

$v_c(0^-) = 0$  , debido a que se encuentra en paralelo con el cortocircuito.

En el lazo izquierdo se aplica la LVK:

$$-450 + 2500 i(0^-) = 0$$

$$i(0^-) = \frac{450}{2500} = 0.18 \text{ A}$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.21, el interruptor se abre. Como resultado se tiene el circuito de la figura 3.23. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ .

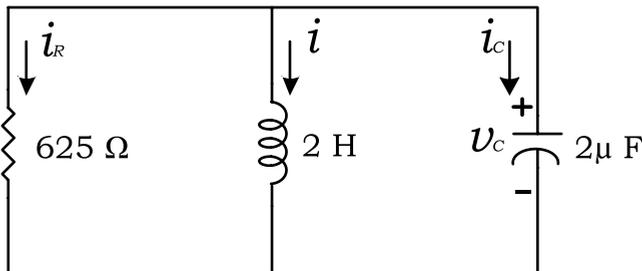


Figura 3.23

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(625)(2 \times 10^{-6})} = 400$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2)(2 \times 10^{-6})}} = 500$$

$\alpha < \omega_0$ , es un circuito subamortiguado.

Para un circuito RLC en paralelo subamortiguado, el voltaje viene dado por:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$\omega_d = \sqrt{(\omega_0)^2 - \alpha^2} = \sqrt{500^2 - 400^2} = 300$$

$$v_c(t) = e^{-400t}(B_1 \cos 300t + B_2 \sin 300t) \quad (3-44)$$

$$i_R(0^+) + i_L(0^+) + i_C(0^+) = 0$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_c(0^+)}{625} = \frac{0}{625} = 0$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.18 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -0.18 \text{ A} \quad (3-45)$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0$$

Reemplazando en la ecuación (3-44):

$$v_c(0) = e^0(B_1 \cos 0 + B_2(0)) = B_1 = 0$$

$$v_c(t) = e^{-400t} B_2 \operatorname{sen} 300t \quad (3-46)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = e^{-400t} (B_2(300) \cos 300t) + (-400)e^{-400t} B_2 \operatorname{sen} 300t$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = e^0 (B_2(300)) = 300 B_2$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = 300 B_2 \quad (3-47)$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{-0.18}{2 \times 10^{-6}} = -90000$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = -90\,000 \quad (3-48)$$

La ecuación (3-47) = (3-48):

$$300 B_2 = -90000$$

$$B_2 = -300$$

Reemplazando en la ecuación (3-46):

$$v_c(t) = e^{-400t} (-300) \operatorname{sen} 300t$$

$$v_c(t) = -300 e^{-400t} \operatorname{sen} 300t \quad (3-49)$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$i_c(t) = 2 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (-300 e^{-400t} \text{ sen } 300t)$$

$$i_c(t) = (2 \times 10^{-6})(-300)[e^{-400t}(300) \cos 300t + (-400)e^{-400t} \text{ sen } 300t]$$

$$i_c(t) = -0.18 e^{-400t} \cos 300t + 0.24 e^{-400t} \text{ sen } 300t \quad (3-50)$$

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{625} = \frac{-300}{625} e^{-400t} \text{ sen } 300t$$

$$i_R(t) = -0.48 e^{-400t} \text{ sen } 300t \text{ A} \quad (3-51)$$

En el nodo superior de la figura 3.23, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$i_R + i + i_c = 0$$

$$i = -i_c - i_R$$

$$i(t) = -(-0.18 e^{-400t} \cos 300t + 0.24 e^{-400t} \text{ sen } 300t) - (0.48 e^{-400t} \text{ sen } 300t)$$

$$i(t) = 0.18 e^{-400t} \cos 300t - 0.24 e^{-400t} \text{ sen } 300t - 0.48 e^{-400t} \text{ sen } 300t$$

$$i(t) = 0.18 e^{-400t} \cos 300t - 0.72 e^{-400t} \text{ sen } 300t \text{ A}$$

**Problema 16:** “El interruptor en el circuito de la figura 3.24 ha estado abierto durante varias horas antes de cerrarse en  $t = 0$ , encuentrese  $v_c(t)$  para  $t > 0$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 236).

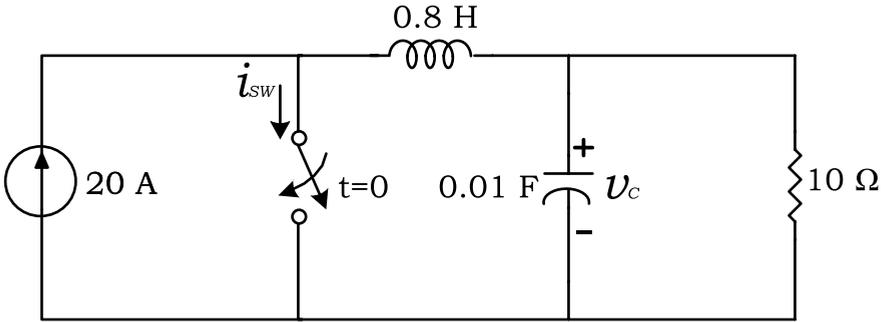


Figura 3.24

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.24, el interruptor está abierto. Debido al estado estable del circuito y a la fuente independiente de corriente de 20 A de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.25. A continuación se plantean las ecuaciones:

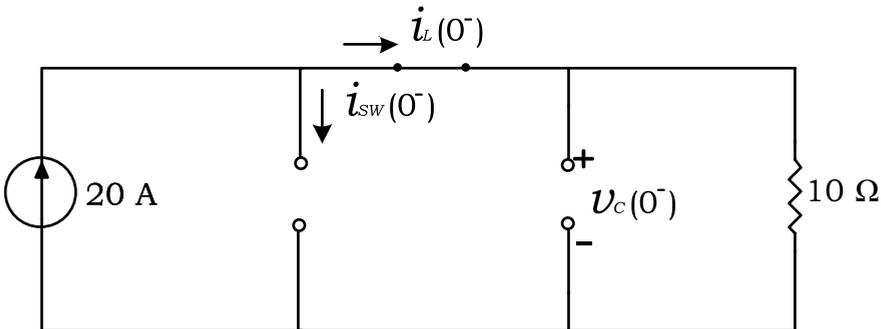


Figura 3.25

$$i_{sw}(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = 20 \text{ A}$$

$$v_c(0^-) = 10 \quad i_L(0^-) = 10(20) = 200$$

$$v_c(0^-) = 200 \text{ Volt}$$

Para  $t > 0$ , en la figura 3.24, el interruptor está cerrado, como resultado se tiene el circuito de la figura 3.26.

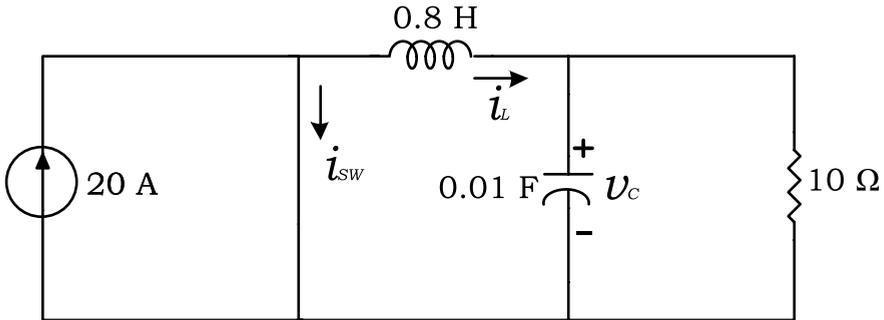


Figura 3.26

La fuente de corriente de 20 A circula por el cortocircuito, esta fuente no afecta al circuito de la derecha para los parámetros que se desea calcular, dando como resultado el circuito de la figura 3.27. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ :

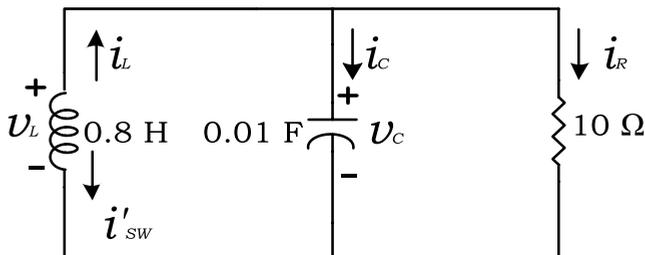


Figura 3.27

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(10)(0.01)} = 5$$

$$W_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.8)(0.01)}} = 11.18$$

$W_0 > \alpha$ , es un circuito subamortiguado

$$W_d = \sqrt{W_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{(11.18)^2 - 5^2} = 10 \text{ rad/seg}$$

Para un circuito RLC en paralelo subamortiguado, el voltaje viene dado por:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos W_d t + B_2 \sen W_d t)$$

$$v_c(t) = e^{-5t}(B_1 \cos 10t + B_2 \sen 10t)$$

$$v_c(0) = e^0(B_1 \cos 0^0 + B_2 \sen 0^0) = B_1$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 200 \text{ Volt}$$

$$v_c(0) = B_1 = 200$$

$$B_1 = 200$$

$$v_c(t) = e^{-5t}(200 \cos 10t + B_2 \sen 10t) \quad (3-52)$$

En el nodo superior de la figura 3.27, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$-i_L + i_C + i_R = 0$$

$$-i_L(0^+) + i_C(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 20 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{10} = \frac{200}{10} = 20 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = 20 - 20 = 0 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = 0 \text{ A}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{0}{C} = 0$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ Volt} \quad (3-53)$$

De la ecuación (3-52):

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt} [e^{-5t}(200 \cos 10t + B_2 \sin 10t)]$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} = e^{-5t} [(200)(10)(-\sin 10t) + (B_2 10 \cos 10t)] \\ + (-5)e^{-5t}(200 \cos 10t + B_2 \sin 10t) \end{aligned}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = e^{-5t}(-2000 \operatorname{sen} 10t + 10B_2 \cos 10t) - 5e^{-5t}(200 \cos 10t + B_2 \operatorname{sen} 10t)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = e^0(-2000 \operatorname{sen} 0^0 + 10B_2 \cos 0^0) - 5e^0(200 \cos 0^0 + B_2 \operatorname{sen} 0^0)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = 10B_2 - 5(200)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = 10B_2 - 1000 \quad (3-54)$$

La ecuación (3-54) = (3-53):

$$10 B_2 - 1000 = 0$$

$$10 B_2 = 1000$$

$$B_2 = 100$$

$$v_c(t) = e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \operatorname{sen} 10t) \quad \text{V} \quad (3-55)$$

**Problema 17:** considerando el problema 16, calcular  $i_{sw}$ .

*Solución:*

En la figura 3.27:

$$i'_{sw} = -i_L$$

La corriente en el capacitor:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

De la ecuación (3-55):

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} [e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \operatorname{sen} 10t)]$$

$$i_C(t) = 0.01 [e^{-5t}((200)(10)(-\operatorname{sen} 10t) + (100)(10) \cos 10t) + (-5)e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \operatorname{sen} 10t)]$$

$$i_C(t) = 0.01 [e^{-5t}(-2000 \operatorname{sen} 10t + 1000 \cos 10t) - 5e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \operatorname{sen} 10t)]$$

$$i_C(t) = 0.01 e^{-5t} [-2000 \operatorname{sen} 10t + 1000 \cos 10t - 1000 \cos 10t - 500 \operatorname{sen} 10t]$$

$$i_C(t) = 0.01 e^{-5t} [-2500 \operatorname{sen} 10t]$$

$$i_C(t) = -25 e^{-5t} \operatorname{sen} 10t$$

$$i_R(t) = \frac{v_C(t)}{10} = \frac{1}{10} e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \operatorname{sen} 10t)$$

$$i_R(t) = e^{-5t}(20 \cos 10t + 10 \operatorname{sen} 10t)$$

En el nodo superior de la figura 3.27, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$-i_L + i_C + i_R = 0$$

$$i_L = i_C + i_R$$

$$i_L(t) = -25 e^{-5t} \text{ sen } 10t + e^{-5t}(20 \cos 10t + 10 \text{ sen } 10t)$$

$$i_L(t) = -25 e^{-5t} \text{ sen } 10t + 20e^{-5t} \cos 10t + 10 e^{-5t} \text{ sen } 10t$$

$$i_L(t) = -15e^{-5t} \text{ sen } 10t + 20e^{-5t} \cos 10t$$

$$i_L(t) = e^{-5t}(-15 \text{ sen } 10t + 20 \cos 10t)$$

$$i'_{sw}(t) = -i_L(t)$$

$$i'_{sw}(t) = -[e^{-5t}(-15 \text{ sen } 10t + 20 \cos 10t)]$$

$$i'_{sw}(t) = e^{-5t}(15 \text{ sen } 10t - 20 \cos 10t)$$

En las figuras 3.26 y 3.27:

$$i_{sw}(t) = 20 + i'_{sw}(t)$$

$$i_{sw}(t) = 20 + e^{-5t}(15 \text{ sen } 10t - 20 \cos 10t)$$

**Problema 18:** considerando el problema 16, calcular  $i_{sw}$  de otra forma.

*Solución:*

Por definición, el voltaje en el inductor:

$$-v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L dt$$

$$i_L(t) = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt$$

$v_L(t) = v_c(t)$ , ver la ecuación (3-55).

$$i_L(t) = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_c(t) dt$$

$$-i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e^{-5t} (200 \cos 10t + 100 \operatorname{sen} 10t) dt$$

$$-i_L(t) = \frac{1}{0.8} \int_{-\infty}^t e^{-5t} 200 \cos 10t dt + \frac{1}{0.8} \int_{-\infty}^t e^{-5t} 100 \operatorname{sen} 10t dt$$

$$-i_L(t) = 250 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \cos 10t dt + 125 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \operatorname{sen} 10t dt$$

$$u = \cos 10t \qquad \int dv = \int e^{-5t} dt$$

$$du = -10 \operatorname{sen} 10t dt \qquad v = -\frac{e^{-5t}}{5}$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \cos 10t dt = uv - \int v du$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \cos 10t dt = -\frac{e^{-5t}}{5} \cos 10t - \int -\frac{e^{-5t}}{5} (-10 \operatorname{sen} 10t) dt$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \cos 10t dt = -\frac{e^{-5t}}{5} \cos 10t \Big|_0^t - 2 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \operatorname{sen} 10t dt \qquad (3-56)$$

$$-i_L(t) = 250 \left[ -\frac{e^{-5t}}{5} \cos 10t \Big|_0^t - 2 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \operatorname{sen} 10t dt \right] + 125 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \operatorname{Sen} 10t dt$$

$$-i_L(t) = -50e^{-5t} \cos 10t \Big|_0^t - 500 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{Sen } 10t \, dt + 125 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{Sen } 10t \, dt$$

$$-i_L(t) = -50e^{-5t} \cos 10t \Big|_{-\infty}^t - 375 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{Sen } 10t \, dt \quad (3-57)$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = uv - \int v \, du$$

$$u = \text{sen } 10t$$

$$du = -10 \cos 10t \, dt$$

$$\int dv = \int e^{-5t} \, dt$$

$$v = -\frac{e^{-5t}}{5}$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = \left[ -\frac{e^{-5t}}{5} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t -\frac{e^{-5t}}{5} 10 \cos 10t \, dt \right]$$

$$\int_0^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = -\left[ \frac{e^{-5t}}{5} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t + 2 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \cos 10t \, dt \right]$$

De la ecuación (3-56):

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = -\left[ \frac{e^{-5t}}{5} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t + 2 \left[ -\frac{e^{-5t}}{5} \cos 10t \Big|_{-\infty}^t - 2 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt \right] \right]$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = -\left[ \frac{e^{-5t}}{5} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t - [0,4 e^{-5t} \cos 10t]_{-\infty}^t - 4 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt \right]$$

$$5 \int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = \left[ -\frac{e^{-5t}}{5} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t - [0,4 e^{-5t} \cos 10t]_{-\infty}^t \right]$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-5t} \text{sen } 10t \, dt = \left[ -\frac{e^{-5t}}{25} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t - [0,08 e^{-5t} \cos 10t]_{-\infty}^t \right] \quad (3-58)$$

La ecuación (3-58) en (3-57):

$$-i_L(t) = -[50 e^{-5t} \cos 10t]_{-\infty}^t - 375 \left\{ -\frac{e^{-5t}}{25} \text{sen } 10t \Big|_{-\infty}^t - 0,08 e^{-5t} \cos 10t \Big|_{-\infty}^t \right\}$$

$$-i_L(t) = -[50 e^{-5t} \cos 10t]_{-\infty}^t + 15e^{-5t} \sin 10t \Big|_{-\infty}^t + 30e^{-5t} \cos 10t \Big|_{-\infty}^t$$

$$-i_L(t) = -[20 e^{-5t} \cos 10t]_{-\infty}^t + [15e^{-5t} \sin 10t]_{-\infty}^t$$

$$-i_L(t) = -[20 e^{-5t} \cos 10t - 0] + 15(e^{-5t} \sin 10t - 0)$$

$$i_L(t) = +20e^{-5t} \cos 10t - 15e^{-5t} \sin 10t$$

$$i'_s w(t) = -i_L(t)$$

$$i'_s w(t) = -(20e^{-5t} \cos 10t - 15e^{-5t} \sin 10t)$$

$$i_s w(t) = 20 + i'_s w(t)$$

$$i_s w(t) = 20 + e^{-5t}(-20 \cos 10t + 15 \sin 10t)$$

$$i_s w(t) = 20 + e^{-5t}(15 \sin 10t - 20 \cos 10t)$$

**Problema 19:** “Después de haber estado abierto durante mucho tiempo, el interruptor en el circuito mostrado en la figura 3.28 se cierra en  $t = 0$ . Calcúlese  $v_c(t)$  para  $t > 0$ ” (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 236).

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 3.28, el interruptor está abierto. Debido al estado estable del circuito y a la fuente independiente de 20 A de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor se comporta como un circuito abierto; el circuito resultante se muestra en la figura 3.29. A continuación se plantean las ecuaciones:

$$i_L(0^-) = 20 \text{ A}$$

$$v_c(0^-) = 6.5(-i_L(0^-))$$

$$v_c(0^-) = -(6.5)(20) = -130$$

$$v_c(0^-) = -130 \text{ V}$$

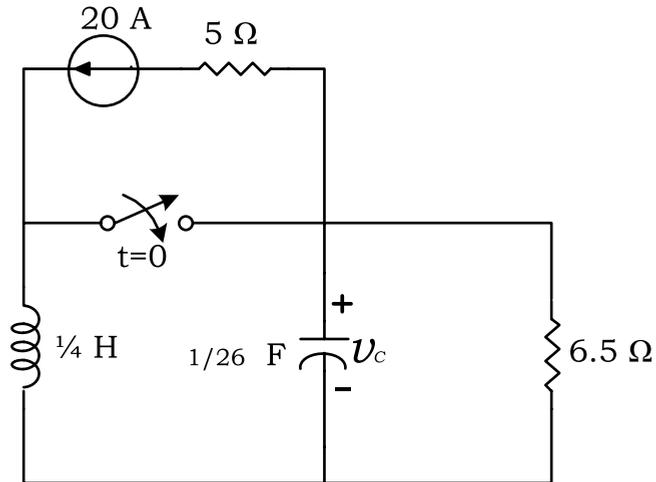


Figura 3.28

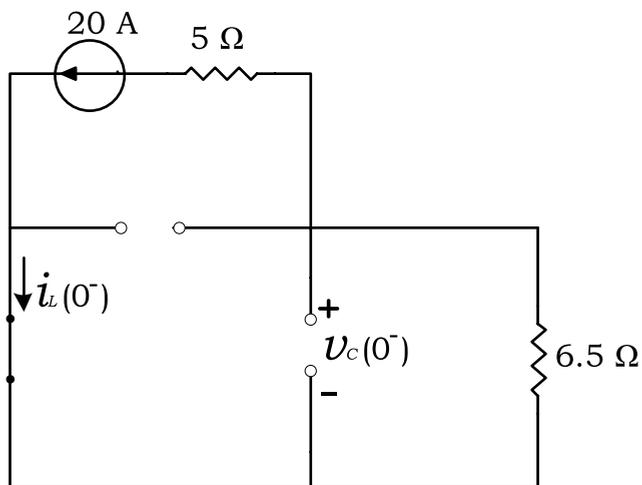


Figura 3.29

Para  $t > 0$ , en la figura 3.28 el interruptor está cerrado, como resultado se tiene el circuito de la figura 3.30. La fuente de corriente de 20 A circula por el cortocircuito y por la resistencia de  $5 \Omega$ . Esta fuente no afecta al circuito inferior para los parámetros que se desea calcular, dando como resultado el circuito de la figura 3.31. Se calculan los parámetros del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(6.5)\left(\frac{1}{26}\right)} = 2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{26}\right)}} = 10.2$$

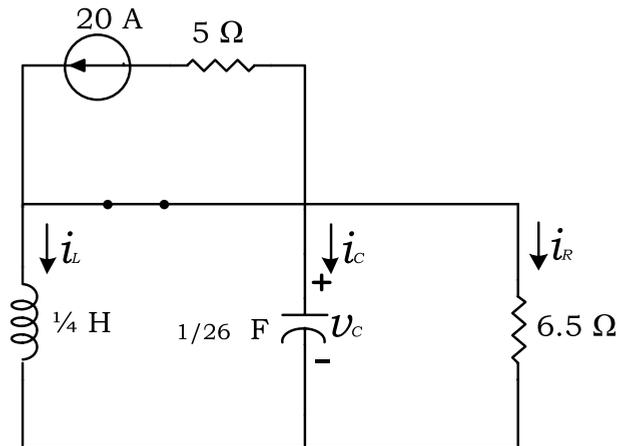


Figura 3.30

$\omega_0 > \alpha$ , es un circuito subamortiguado:

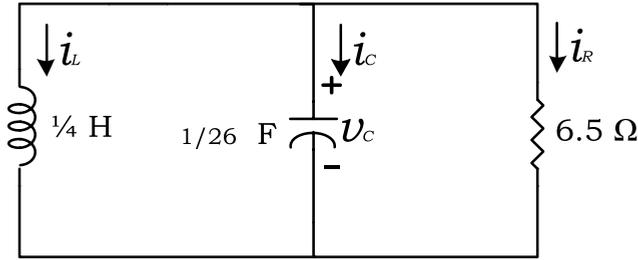


Figura 3.31

La figura 3.31 es un circuito RLC en paralelo subamortiguado. El voltaje viene dado por:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos W_d t + B_2 \text{sen} W_d t)$$

$$W_d = \sqrt{(W_0)^2 - \alpha^2} = \sqrt{(10.2)^2 - (2)^2} = 10$$

$$v_c(t) = e^{-2t}(B_1 \cos 10t + B_2 \text{sen} 10t)$$

$$v_c(0) = e^0(B_1 \cos 0^0 + B_2 \text{sen} 0^0) = B_1$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = -130$$

$$v_c(0) = B_1 = -130$$

$$B_1 = -130$$

$$v_c(t) = e^{-2t}(-130 \cos 10t + B_2 \text{sen} 10t)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = e^{-2t}(+130(10)\text{sen} 10t + 10B_2 \cos 10t) + (-2)e^{-2t}(-130 \cos 10t + B_2 \text{sen} 10t)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = e^0(+1300 \text{sen} 0 + 10B_2 \cos 0) - 2e^0(-130 \cos 0 + B_2 \text{sen} 0)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = 10B_2 + 260 \quad (3-59)$$

En el nodo superior de la figura 3.31, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), asumiendo que las corrientes que entran al nodo tienen signo negativo y las corrientes que salen del nodo tienen signo positivo:

$$i_L + i_c + i_R = 0$$

$$i_L(0^+) + i_c(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_c(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) \quad (3-60)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 20 \text{ A}$$

$$i_R(0^+) = \frac{V_c(0^+)}{6.5} = \frac{-130}{6.5} = -20 \text{ A}$$

En la ecuación (3-60):

$$i_c(0^+) = -20 - (-20) = 0 \text{ A}$$

$$i_c(0^+) = 0 \text{ A}$$

$$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t)$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{0}{\frac{1}{26}}$$

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3-61)$$

La ecuación (3-59) = (3-61):

$$10B_2 + 260 = 0$$

$$10B_2 = -260$$

$$B_2 = -26$$

$$v_c(t) = e^{-2t}(-130 \cos 10t + (-26 \operatorname{sen} 10t))$$

$$v_c(t) = e^{-2t}(-130 \cos 10t - 26 \operatorname{sen} 10t) \text{ V}$$

## CAPÍTULO 4 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

### Problemas Resueltos

**Problema 1:** “En la red que se muestra en la figura 4.1, el interruptor se mueve de la posición *a* a la *b*, en  $t = 0$ , habiéndose alcanzado previamente el estado estable en la posición *a*. Determine la corriente  $i(t)$  aplicando el método de transformación de Laplace” (Van Valkenburg, 1980, p. 229).

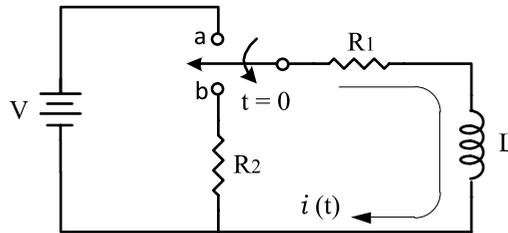


Figura 4.1

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 4.1, el interruptor está cerrado en la posición *a*, tal como se muestra en la figura 4.2. Debido a que el circuito se encuentra en estado estable y a la fuente de voltaje independiente  $V$  de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito.

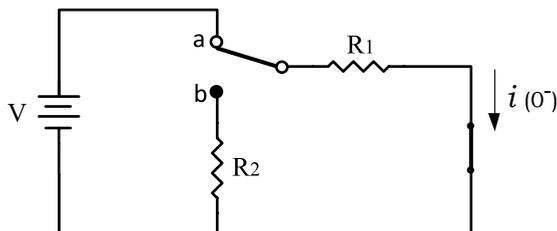


Figura 4.2

En la figura 4.2, en el lazo exterior, se aplica la Ley de Voltaje de Kirchoff (LVK):

$$-V + R_1 i(0^-) = 0$$

$$i(0^-) = \frac{V}{R_1}$$

Para  $t > 0$ , en la figura 4.1, el interruptor está cerrado en la posición b, tal como se muestra en la figura 4.3.

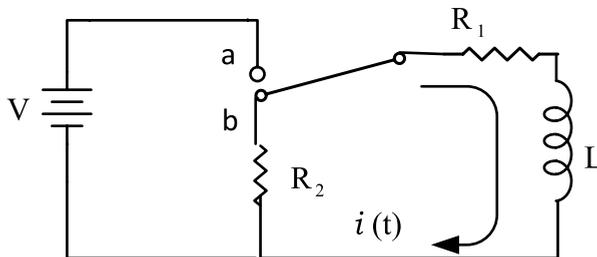


Figura 4.3

En el lazo de la figura 4.3, se aplica la LVK:

$$R_2 i(t) + R_1 i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$i(t)(R_1 + R_2) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

Aplicando a cada término la transformación de Laplace:

$$I(s)[R_1 + R_2] + L [sI(s) - i(0^-)] = 0$$

Reemplazando la condición inicial de la corriente y reduciendo términos, se tiene:

$$I(s)[R_1 + R_2] + L SI(s) - \frac{LV}{R_1} = 0$$

$$I(s)[R_1 + R_2 + LS] = \frac{LV}{R_1}$$

$$I(s) = \frac{LV}{R_1(R_1 + R_2 + LS)} = \frac{LV}{R_1 L \left( \frac{R_1 + R_2}{L} + S \right)}$$

$$I(s) = \frac{V}{R_1} \frac{1}{\left( S + \frac{R_1 + R_2}{L} \right)}$$

Aplicando la transformación inversa de Laplace:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{V}{R_1} \frac{1}{\left( S + \frac{R_1 + R_2}{L} \right)} \right\}$$

$$i(t) = \frac{V}{R_1} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{\left( S + \frac{R_1 + R_2}{L} \right)} \right\}$$

$$i(t) = \frac{V}{R_1} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}$$

**Problema 2:** “En la red de la figura 4.4, el interruptor se desplaza de la posición *a* a la posición *b*, en el tiempo  $t = 0$  (habiendo existido un estado permanente en la posición *a* antes de que  $t = 0$ ). Calcular la corriente  $i(t)$  utilizando el método de la transformación de Laplace” (Van Valkenburg, 1980, p. 229).

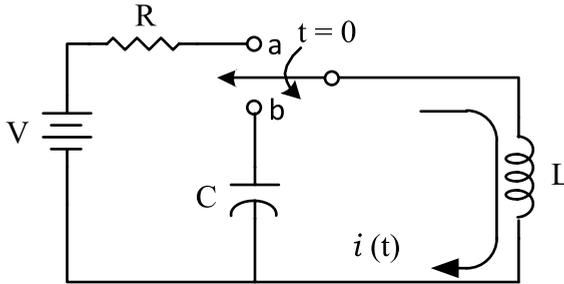


Figura 4.4

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 4.4, el interruptor está cerrado en la posición *a*, tal como se muestra en la figura 4.5. Debido a que el circuito se encuentra en estado estable y a la fuente de voltaje independiente  $V$  de corriente continua, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor como un circuito abierto.

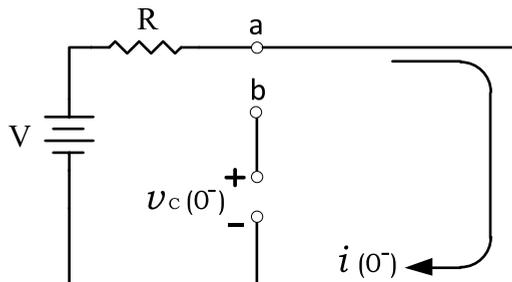


Figura 4.5

En la figura 4.5, en el lazo externo se aplica la LVK:

$$-V + R i(0^-) = 0$$

$$i(0^-) = \frac{V}{R}$$

El terminal b está abierto; entonces el voltaje en el capacitor es cero:

$$v_c(0^-) = 0$$

Para  $t > 0$ , en la figura 4.4, el interruptor está cerrado en la posición b, tal como se muestra en la figura 4.6.

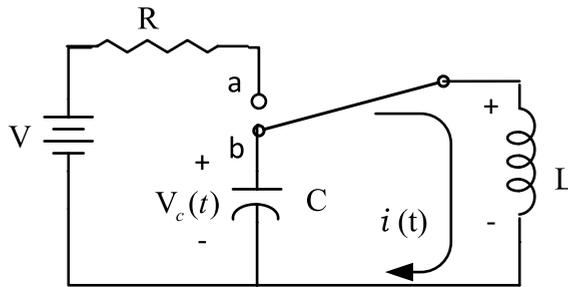


Figura 4.6

En la figura 4.6, se aplica la LVK:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i dt = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \left[ \int_{-\infty}^0 i dt + \int_0^t i dt \right] = 0 \quad (4-1)$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\int dq = \int i dt$$

$$q = \int i dt$$

$$q(t) = \int i(t) dt$$

$$q(0^-) = \int_{-\infty}^0 i(t) dt$$

Por definición, la fórmula de la capacitancia es:

$$C = \frac{q}{V}$$

Despejando el voltaje en el capacitor:

$$V = \frac{q}{C}$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales, el voltaje inicial en el capacitor es:

$$V_0 = \frac{q(0^-)}{C} = v_c(0^-)$$

Reemplazando en la ecuación (4-1):

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \left[ q(0^-) + \int_0^t i dt \right] = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q(0^-)}{C} + \frac{1}{c} \int_0^t i dt = 0$$

Aplicando la transformación de Laplace a cada término, se tiene:

$$L(SI(s) - i(0^-)) + \frac{v_c(0^-)}{S} + \frac{1}{CS} I(s) = 0$$

$$LS I(s) - L \frac{V}{R} + \frac{1}{CS} I(s) = 0$$

$$I(s) \left[ LS + \frac{1}{CS} \right] = \frac{VL}{R}$$

$$I(s) \left[ \frac{LCS^2 + 1}{CS} \right] = \frac{VL}{R}$$

$$I(s) = \frac{VL}{R} \frac{CS}{LCS^2 + 1} = \frac{VL}{R} \frac{CS}{LC \left( S^2 + \frac{1}{LC} \right)}$$

$$I(s) = \frac{V}{R} \frac{S}{S^2 + \frac{1}{LC}}$$

Aplicando la transformación inversa de Laplace:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V}{R} \frac{S}{S^2 + \frac{1}{LC}} \right\} = \frac{V}{R} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S}{S^2 + \frac{1}{LC}} \right\}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S}{S^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2} \right\}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

**Problema 3:** “El interruptor de la figura 4.7 se mueve de la posición *a* a la posición *b* en  $t = 0$  habiendo estado en la posición *a* durante mucho tiempo antes de  $t = 0$ . El capacitor  $c_2$  está descargado en el tiempo  $t = 0$ . Encuentre la solución de la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$ ” (Van Valkenburg, 1980, p. 136).

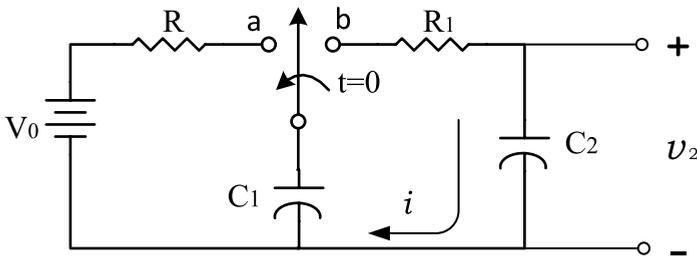


Figura 4.7

*Solución:*

Para  $t < 0$ , en la figura 4.7, el interruptor está cerrado en la posición *a*, tal como se muestra en la figura 4.8. Debido a que el circuito se encuentra en estado estable y a la fuente de voltaje independiente  $V_0$  de corriente continua, los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  se comportan como un circuito abierto. A

continuación se plantean las ecuaciones.

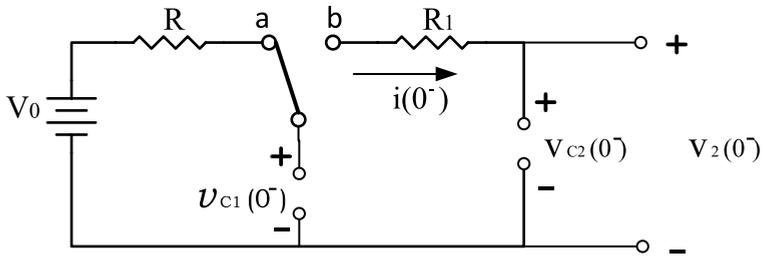


Figura 4.8

$$v_{c1}(0^-) = V_0$$

$$v_{c2}(0^-) = 0$$

$$v_2(0^-) = 0$$

$$i(0^-) = 0$$

Para  $t > 0$ , en la figura 4.7, el interruptor está cerrado en la posición b, tal como se muestra en la figura 4.9.

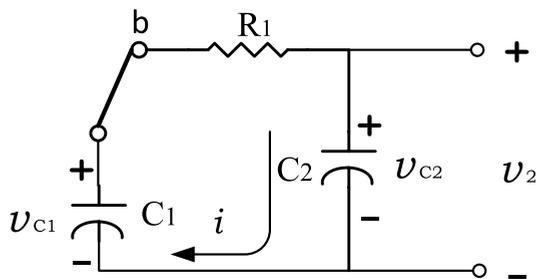


Figura 4.9

En la figura 4.9, en el lazo, se aplica la LVK:

$$-v_{c1} + R_1 i + v_{c2} = 0$$

$$-\frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt + R_1 i + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i dt = 0$$

$$-\frac{1}{C_1} \left[ \int_{-\infty}^0 i dt + \int_0^t i dt \right] + R_1 i + \frac{1}{C_2} \left[ \int_{-\infty}^0 i dt + \int_0^t i dt \right] = 0$$

$$-\frac{1}{c_1} \left[ q_1(0^-) + \int_0^t i dt \right] + R_1 i + \frac{1}{c_2} \left[ q_2(0^-) + \int_0^t i dt \right] = 0 \quad (4-2)$$

Pero:

$$C_1 = \frac{q_1(0^-)}{v_{c1}(0^-)}$$

Despejando la carga uno:

$$q_1(0^-) = C_1 v_{c1}(0^-)$$

$$q_1(0^-) = C_1 V_0$$

$$C_2 = \frac{q_2(0^-)}{v_{c2}(0^-)}$$

$$q_2(0^-) = C_2 v_{c2}(0^-)$$

$$q_2(0^-) = C_2(0) = 0$$

Reemplazando en la ecuación (4-2):

$$-\frac{1}{c_1} \left[ C_1 V_0 + \int_0^t i dt \right] + R_1 i + \frac{1}{c_2} \left[ 0 + \int_0^t i dt \right] = 0 \quad (4-3)$$

Aplicando la transformación de Laplace en cada término de la ecuación (4-3):

$$-\frac{1}{C_1} \left[ \frac{C_1 V_0}{S} + \frac{I(s)}{S} \right] + R_1 I(s) + \frac{1}{C_2} \left[ \frac{I(s)}{S} \right] = 0$$

$$-\frac{V_0}{S} - \frac{I(s)}{C_1 S} + R_1 I(s) + \frac{I(s)}{C_2 S} = 0$$

$$-\frac{V_0}{S} + I(s) \left[ -\frac{1}{C_1 S} + R_1 + \frac{1}{C_2 S} \right] = 0$$

$$-\frac{V_0}{S} + I(s) \left[ \frac{-C_2 + R_1 C_1 C_2 S + C_1}{C_1 C_2 S} \right] = 0$$

$$I(s) = \frac{V_0 C_1 C_2 S}{S (R_1 C_1 C_2 S + C_1 - C_2)}$$

$$I(s) = \frac{V_0 C_1 C_2}{R_1 C_1 C_2 S + C_1 - C_2} = \frac{V_0 C_1 C_2}{R_1 C_1 C_2 \left( S + \frac{C_1 - C_2}{R_1 C_1 C_2} \right)}$$

$$I(s) = \frac{V_0}{R_1 \left( S + \frac{C_1 - C_2}{R_1 C_1 C_2} \right)}$$

Aplicando la transformación inversa de Laplace:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V_0}{R_1 \left( S + \frac{c_1 - c_2}{R_1 c_1 c_2} \right)} \right\} = \frac{V_0}{R_1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S + \frac{c_1 - c_2}{R_1 c_1 c_2}} \right\}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R_1} e^{-\left( \frac{c_1 - c_2}{R_1 c_1 c_2} \right) t} \text{ A}$$

**Problema 4:** “En la red de la figura 4.10, el voltaje inicial en  $c_1$  es  $V_1$  y el de  $c_2$  es  $V_2$ , de tal manera que  $v_1(0) = V_1$  y  $v_2(0) = V_2$ . El interruptor se cierra en un tiempo  $t = 0$ . Determine la corriente  $i(t)$  para todo  $t$ ” (Van Valkenburg, 1980, p. 136).

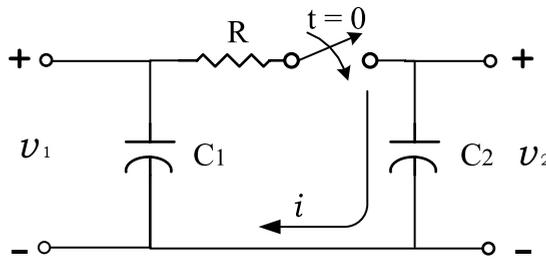


Figura 4.10

*Solución:*

Para  $t < 0$ , las condiciones iniciales del problema son:

$$v_{c_1}(0^-) = V_1 = v_1(0^-)$$

$$v_{c_2}(0^-) = V_2 = v_2(0^-)$$

Para  $t > 0$ , en la figura 4.10, el interruptor está cerrado, tal como se muestra en la figura 4.11.

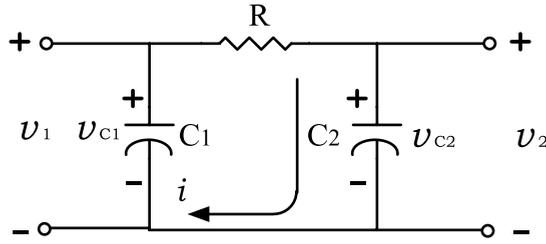


Figura 4.11

En la figura 4.11, en el lazo central, se aplica la LVK:

$$-v_{c1} + Ri + v_{c2} = 0$$

$$-\frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt + Ri + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i dt = 0$$

$$-\frac{1}{C_1} \left[ \int_{-\infty}^0 i dt + \int_0^t i dt \right] + Ri + \frac{1}{C_2} \left[ \int_{-\infty}^0 i dt + \int_0^t i dt \right] = 0$$

$$C_1 = \frac{q_1(0^-)}{v_{c1}(0^-)}$$

$$q_1(0^-) = C_1 v_{c1}(0^-) = C_1 V_1$$

$$C_2 = \frac{q_2(0^-)}{v_{c2}(0^-)}$$

$$q_2(0^-) = C_2 v_{c2}(0^-) = C_2 V_2$$

$$-\frac{1}{C_1} \left[ q_1(0^-) + \int_0^t i dt \right] + Ri + \frac{1}{C_2} \left[ q_2(0^-) + \int_0^t i dt \right] = 0$$

$$-\frac{1}{C_1} \left[ C_1 V_1 + \int_0^t i dt \right] + Ri + \frac{1}{C_2} \left[ C_2 V_2 + \int_0^t i dt \right] = 0$$

Aplicando la transformación de Laplace en cada término:

$$-\frac{1}{C_1} \left[ \frac{C_1 V_1}{S} + \frac{I(s)}{S} \right] + R I(s) + \frac{1}{C_2} \left[ \frac{C_2 V_2}{S} + \frac{I(s)}{S} \right] = 0$$

$$-\frac{V_1}{S} - \frac{I(s)}{C_1 S} + R I(s) + \frac{V_2}{S} + \frac{I(s)}{C_2 S} = 0$$

$$-\frac{V_1}{S} + \frac{V_2}{S} + I(s) \left[ -\frac{1}{C_1 S} + R + \frac{1}{C_2 S} \right] = 0$$

$$I(s) \left[ \frac{-C_2 + RC_1 C_2 S + C_1}{C_1 C_2 S} \right] = \frac{V_1}{S} - \frac{V_2}{S}$$

$$I(s) \left[ \frac{RC_1 C_2 S + C_1 - C_2}{C_1 C_2 S} \right] = \frac{V_1 - V_2}{S}$$

$$I(s) = \frac{(V_1 - V_2) C_1 C_2 S}{S(RC_1 C_2 S + C_1 - C_2)} = \frac{(V_1 - V_2) C_1 C_2}{RC_1 C_2 \left( S + \frac{C_1 - C_2}{RC_1 C_2} \right)}$$

$$I(s) = \frac{V_1 - V_2}{R \left( S + \frac{C_1 - C_2}{RC_1 C_2} \right)}$$

Aplicando la transformación inversa de Laplace:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V_1 - V_2}{R \left( S + \frac{C_1 - C_2}{RC_1 C_2} \right)} \right\} = \frac{(V_1 - V_2)}{R} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S + \frac{C_1 - C_2}{RC_1 C_2}} \right\}$$

$$i(t) = \frac{V_1 - V_2}{R} e^{-\left(\frac{C_1 - C_2}{RC_1 C_2}\right)t}$$



## CAPÍTULO 5 POLOS Y CEROS DE UNA FUNCIÓN

### Problemas Resueltos

**Problema 1:** graficar los polos y ceros de la siguiente función de transferencia:

$$H_1 = \frac{10(s + 2)}{s + 5}$$

*Solución:*

Para graficar los polos y ceros de la función  $H_1(s)$  en el plano S, se procede de la siguiente manera:

Las raíces que están en el numerador de la función  $H_1(s)$  se denominan ceros; esto es:

$$s + 2 = 0$$

$$s = -2$$

Por lo tanto se tiene un cero en -2.

Las raíces que se encuentran en el denominador de la función  $H_1(s)$  se denominan los polos; esto es:

$$s + 5 = 0$$

$$s = -5$$

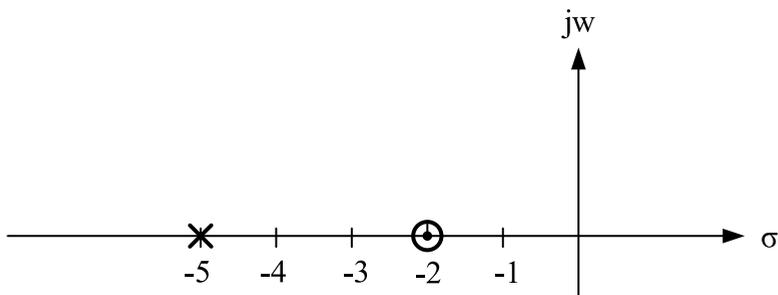
Por lo tanto tenemos un polo en -5

El plano S, tiene una parte real y una parte imaginaria; esto es:

$$S = \sigma \pm j\omega$$

En el plano S, a los ceros lo representamos con un pequeño círculo (o) y a los polos, con una equis (x).

La gráfica de esta función de transferencia  $H_1(s)$ , se encuentra en la figura 5.1.



**Figura 5.1.** Gráfica de polos y ceros en el plano S de la función  $H_1(s)$

**Problema 2:** graficar los polos y ceros de la función de transferencia  $H_2(s)$ .

$$H_2(s) = \frac{s(5s + 20)}{s + 1}$$

*Solución:*

Para graficar los polos y ceros, primero se debe manipular la función y dejar las raíces en la siguiente forma:

Todas las variables  $S$  deben estar solas; esto es:

$$5s + 20 = 0$$

$$5 \left( s + \frac{20}{5} \right)$$

$$5(s + 4) = 0$$

Por lo tanto, se debe volver a escribir la función  $H_2(s)$ , y queda como sigue:

$$H_2(s) = \frac{5s(s + 4)}{s + 1}$$

Ahora sí, se puede graficar los dos ceros y el un polo de la función  $H_2(s)$ . Para obtener los valores de los polos y ceros, cada raíz se debe igualar a cero en forma independiente.

En el numerador de la función se tiene dos raíces (ceros); esto es:

$$s = 0$$

Entonces, es un cero en el origen.

La siguiente raíz (cero) es:

$$s + 4 = 0$$

$$s = -4$$

Entonces, es un cero en - 4.

En el denominador, se tiene una sola raíz (polo):

$$s + 1 = 0$$

$$s = -1$$

Entonces, es un polo en - 1.

En conclusión: los dos ceros ocurren en 0 y - 4 y, el polo ocurre en -1, tal como se muestra en la figura 5.2.

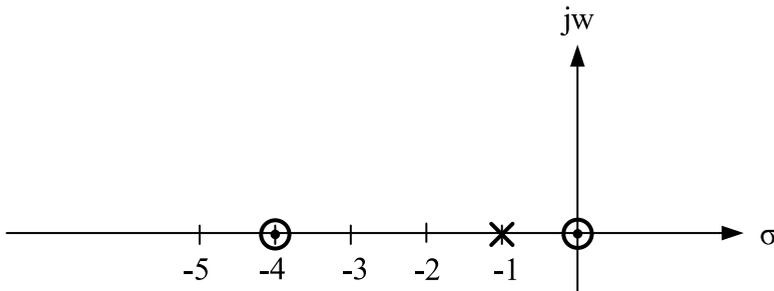


Figura 5.2. Gráfica de polos y ceros de la función  $H_2(s)$

**Problema 3:** graficar los polos y ceros de la función de transferencia  $H_3(s)$

$$H_3(s) = \frac{(s + 2)}{(s^2 + 4s + 13)}$$

*Solución:*

Las raíces del denominador de la función  $H_3(s)$  son como sigue:

$$s^2 + 4s + 13 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm j6}{2}$$

$$s_{1,2} = -2 \pm j3$$

Entonces existen dos polos:

$$s_1 = -2 + j3$$

$$s_2 = -2 - j3$$

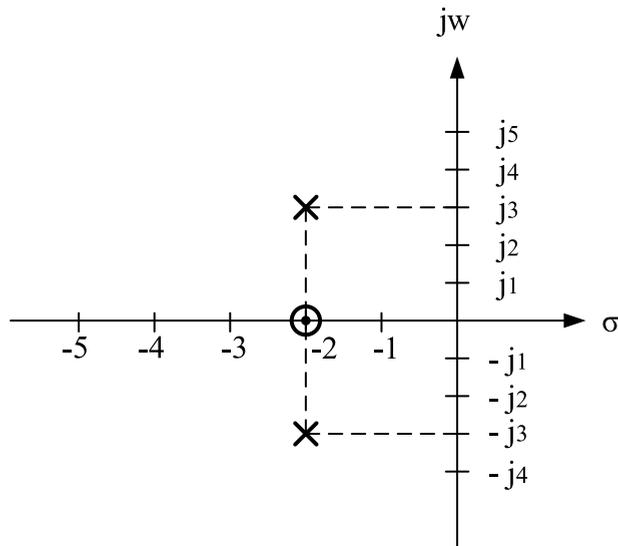
La raíz del numerador de la función  $H_3(s)$  es:

$$s + 2 = 0$$

$$s = -2$$

Por lo tanto existe un cero en -2

La gráfica de los polos y ceros de la función  $H_3(s)$ , se encuentra en la figura 5.3.



**Figura 5.3.** Gráfica de los polos y ceros de la función de transferencia  $H_3(s)$

**Problema 4:** graficar los polos y ceros de la función de transferencia  $H_4(s)$

$$H_4(s) = \frac{8(s - 1)}{s(s + 6)}$$

*Solución:*

La raíz del numerador de la función  $H_4(s)$  es:

$$s - 1 = 0$$

$$s = 1$$

Entonces el cero ocurre en 1.

Cuando los polos o ceros de la función de transferencia están en el lado derecho del plano  $S$ , entonces, el sistema es inestable.

En el denominador de la función  $H_4(s)$  se encuentran dos raíces.

$$s = 0$$

Entonces, el un polo ocurre en el origen.

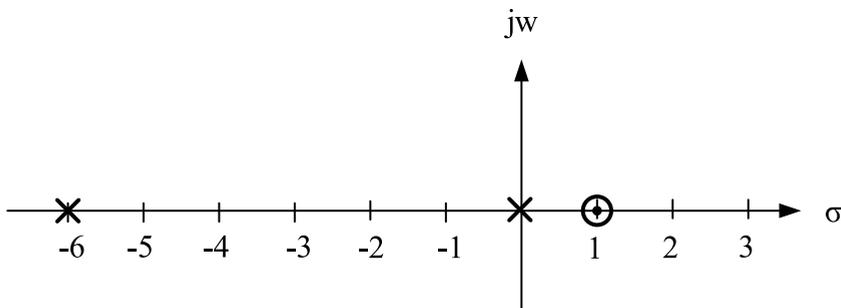
El segundo polo es:

$$s + 6 = 0$$

$$s = -6$$

Entonces este polo ocurre en - 6.

La gráfica se encuentra en la figura 5.4.



**Figura 5.4.** Gráfica de los polos y ceros de la función de transferencia  $H_4(s)$

**Problema 5:** graficar los polos y ceros de la siguiente función de transferencia:

$$H_5(s) = \frac{10(s + 3)^2}{(s^2 + 8s + 20)}$$

*Solución:*

Para el término  $(s + 3)^2$ , se escoge la raíz en  $-3$  y, como es al cuadrado, se pone en ese punto dos veces, esto es, existe dos ceros en  $-3$ .

$$s + 3 = 0$$

$$s = -3$$

El término  $s^2 + 8s + 20$

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(20)}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 80}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

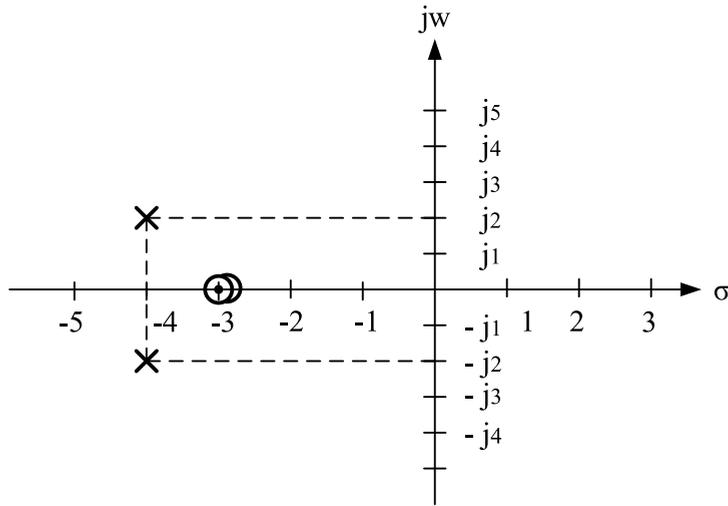
$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm j4}{2} = -4 \pm j2$$

$$s_1 = -4 + j2$$

$$s_2 = -4 - j2$$

Entonces, existen dos polos complejos conjugados.

Las raíces se dibujan en la figura 5.5.



**Figura 5.5.** Gráfica de los polos y ceros de la función de transferencia  $H_5(s)$

**Problema 6:** graficar los polos y ceros de la función de transferencia  $H_6(s)$

$$H_6(s) = \frac{75s}{(s+1)^2}$$

*Solución:*

Los ceros son:

$$s = 0$$

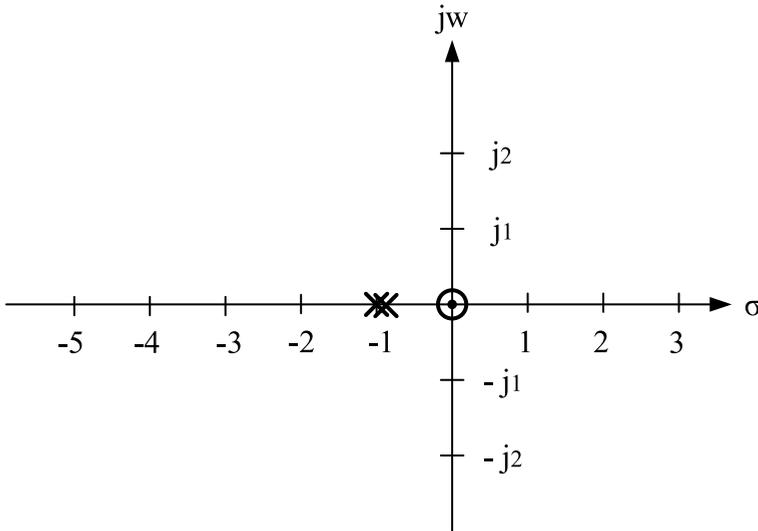
Los polos son:

$$s + 1 = 0$$

$$s = -1$$

Como el término  $(s + 1)^2$  es al cuadrado, entonces, en  $-1$ , existen dos polos y se representan con dos equis (x).

El gráfico se muestra en la figura 5.6.



**Figura 5.6.** Gráfica de los polos y ceros de la función de transferencia  $H_6(s)$

**Problema 7:** graficar los polos y ceros de la función de transferencia  $H_7(s)$

$$H_7(s) = \frac{8(s - 1)}{(s + 6)}$$

*Solución:*

En el numerador, existe una raíz a la derecha del plano S (parte positiva), esto es:

$$s - 1 = 0$$

$$s = 1$$

Entonces el cero ocurre en 1.

Cuando los polos o ceros están en la parte positiva del plano S, el sistema es inestable.

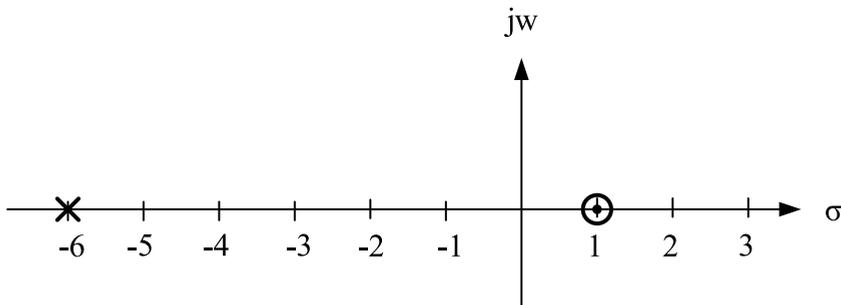
En el denominador de la función  $H_7(t)$  se encuentra una raíz.

$$s + 6 = 0$$

$$s = -6$$

El polo se encuentra en - 6.

La gráfica se encuentra en la figura 5.7.



**Figura 5.7.** Gráfica de los polos y ceros de la función de transferencia  $H_7(s)$



## CAPÍTULO 6 PARÁMETROS DE DOS PUERTOS

### Problemas Resueltos

**Problema 1:** desde el circuito de la figura 6.1, calcular la función de transferencia  $V_2(s) / V_1(s)$  (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 489).

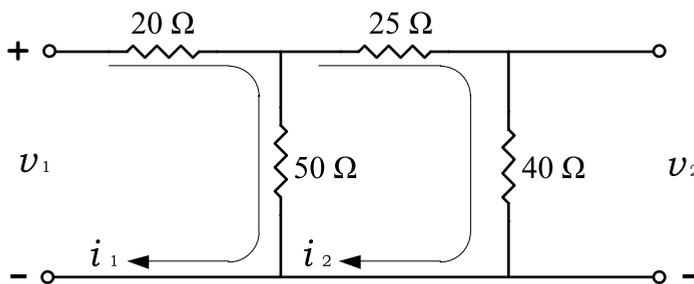


Figura 6.1

*Solución:*

### MALLA 1

Se asume que la corriente de malla  $i_1$  polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de  $i_1$ , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-v_1 + 20 i_1 + 50(i_1 - i_2) = 0$$

Aplicando la transformación de Laplace:

$$\begin{aligned} -V_1(s) + 20I_1(s) + 50[I_1(s) - I_2(s)] &= 0 \\ -V_1(s) + 20I_1(s) + 50I_1(s) - 50I_2(s) &= 0 \\ -V_1(s) + 70I_1(s) - 50I_2(s) &= 0 \\ 70I_1(s) - 50I_2(s) &= V_1(s) \end{aligned} \tag{6-1}$$

### MALLA 2

Se asume que la corriente de malla  $i_2$  polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de  $i_2$ , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$25 i_2 + 40 i_2 + 50(i_2 - i_1) = 0$$

Aplicando la transformación de Laplace:

$$\begin{aligned} 25 I_2(s) + 40 I_2(s) + 50[I_2(s) - I_1(s)] &= 0 \\ 25 I_2(s) + 40 I_2(s) + 50 I_2(s) - 50 I_1(s) &= 0 \\ -50 I_1(s) + 115 I_2(s) &= 0 \\ -50 I_1(s) &= -115 I_2(s) \\ I_1(s) &= \frac{115}{50} I_2(s) \\ I_1(s) &= 2.3 I_2(s) \end{aligned} \tag{6-2}$$

La ecuación (6-2) en la ecuación (6-1):

$$70[2.3 I_2(s)] - 50 I_2(s) = V_1(s)$$

$$161 I_2(s) - 50 I_2(s) = V_1(s)$$

$$111 I_2(s) = V_1(s) \quad (6-3)$$

En la salida del circuito 6.1:

$$v_2 = 40i_2$$

$$V_2(s) = 40 I_2(s)$$

$$I_2(s) = \frac{V_2(s)}{40} \quad (6-4)$$

La ecuación (6-4) en la ecuación (6-3):

$$111 \frac{V_2(s)}{40} = V_1(s)$$

$$V_2(s) = \frac{40}{111} V_1(s)$$

$$V_2(s) = 0.3604 V_1(s)$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = 0.3604$$

NOTA: toda función de transferencia, en el numerador va la variable de salida y en el denominador, la variable de entrada.

**Problema 2:** dado el circuito de la figura 6.2, obtener la función de transferencia  $V_2(s) / V_1(s)$  (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 512).

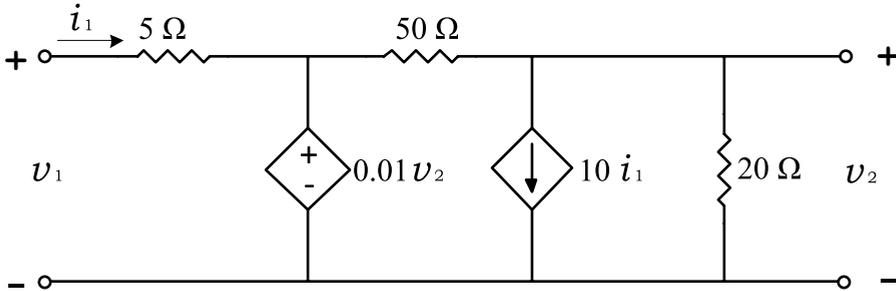


Figura 6.2

*Solución:*

El problema de la figura 6.2 se resuelve por análisis de malla, el mismo que se encuentra en la figura 6.3. La fuente dependiente de corriente se abre y forma una supermalla.

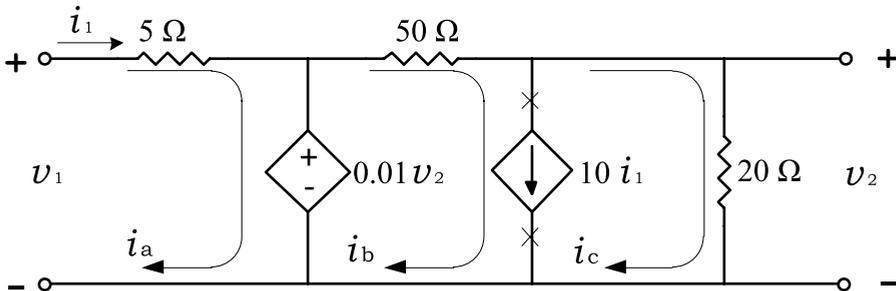


Figura 6.3

MALLA a

Se asume que la corriente de malla  $i_a$  polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están

en la misma dirección de  $i_a$ , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-v_1 + 5 i_a + 0.01v_2 = 0$$

$$v_2 = 20 i_c$$

$$-v_1 + 5 i_a + 0.01(20 i_c) = 0$$

$$-v_1 + 5 i_a + 0.2 i_c = 0$$

$$-V_1(s) + 5 I_a(s) + 0.2 I_c(s) = 0 \quad (6-5)$$

### SUPERMALLA

En la supermalla, se asume que las corriente de mallas  $i_b$  e  $i_c$  polarizan de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de  $i_b$  e  $i_c$ , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-0.01 v_2 + 50 i_b + 20 i_c = 0$$

$$-0.01(20 i_c) + 50 i_b + 20 i_c = 0$$

$$50 i_b + 19.8 i_c = 0$$

$$50I_b(s) + 19.8I_c(s) = 0 \quad (6-6)$$

En la fuente dependiente de corriente:

$$10 i_1 = i_b - i_c$$

$$i_1 = i_a$$

$$10 i_a = i_b - i_c$$

$$10 i_a - i_b + i_c = 0$$

$$10 I_a(s) - I_b(s) + I_c(s) = 0 \quad (6-7)$$

En la salida:

$$v_2 = 20i_c$$

$$V_2(s) = 20I_c(s) \quad (6-8)$$

De la ecuación (6-6),

$$50 I_b(s) = -19.8 I_c(s)$$

$$I_b(s) = -\frac{19.8}{50} I_c(s)$$

$$I_b(s) = -0.396 I_c(s) \quad (6-9)$$

La ecuación (6-9) reemplazar en la ecuación (6-7):

$$10I_a(s) - [-0.396 I_c(s)] + I_c(s) = 0$$

$$10I_a(s) + 0.396 I_c(s) + I_c(s) = 0$$

$$10I_a(s) + 1.396 I_c(s) = 0$$

$$10 I_a(s) = -1.396 I_c(s)$$

$$I_a(s) = -\frac{1.396}{10} I_c(s)$$

$$I_a(s) = -0.1396 I_c(s) \quad (6-10)$$

La ecuación (6-10) se reemplaza en la ecuación (6-5):

$$-V_1(s) + 5[-0.1396 I_c(s)] + 0.2 I_c(s) = 0$$

$$-V_1(s) - 0.698 I_c(s) + 0.2 I_c(s) = 0$$

$$-V_1(s) - 0.498 I_c(s) = 0$$

$$-0.498 I_c(s) = V_1(s)$$

$$I_c(s) = \frac{V_1(s)}{-0.498}$$

$$I_c(s) = -2.01 V_1(s) \quad (6-11)$$

De la ecuación (6-8):

$$I_c(s) = \frac{V_2(s)}{20}$$

$$I_c(s) = 0.05 V_2(s)$$

$$(6-12) = (6-11)$$

$$0.05 V_2(s) = -2.01 V_1(s)$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-2.01}{0.05}$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -40.2$$



## CAPÍTULO 7 GRÁFICAS DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA

### Problemas Resueltos

**Problema 1:** con la función de transferencia  $H(s)$ , preparar la función para poder graficar el diagrama de Bode en amplitud y en fase.

*Solución:*

$$H(s) = \frac{40(8s + 80)(s + 50)}{s(10s^2 + 70s + 370)(2s + 18)^2}$$

$$H(s) = \frac{40(8)\left(s + \frac{80}{8}\right)(s + 50)}{(4)(s)(10)\left(s^2 + \frac{70}{10}s + \frac{370}{10}\right)\left(s + \frac{18}{2}\right)^2}$$

$$H(s) = \frac{40(8)(s + 10)(s + 50)}{4(10)s(s^2 + 7s + 37)(s + 9)^2}$$

$$H(s) = \frac{40(8)(10)(50)\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{50} + 1\right)}{37(4)(10)(81)s\left(\frac{s^2}{37} + \frac{7s}{37} + \frac{37}{37}\right)\left(\frac{s}{9} + 1\right)^2}$$

$$H(s) = \frac{160000\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{50} + 1\right)}{119880s\left[\left(\frac{s}{\sqrt{37}}\right)^2 + \frac{7\sqrt{37}}{37\sqrt{37}}s + 1\right]\left(\frac{s}{9} + 1\right)^2}$$

$$H(s) = \frac{1.335\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{50} + 1\right)^2}{s\left[\left(\frac{s}{6.1}\right)^2 + 1.15\left(\frac{s}{6.1}\right) + 1\right]\left(\frac{s}{9} + 1\right)^2}$$

$$20 \log 1.335 = 2.51$$

$$2\zeta = 1.15$$

$$\zeta = \frac{1.15}{2} = 0.575$$

**Problema 2:** con la función de transferencia  $H(s)$  preparada en el problema 1, se procede a graficar en la figura 7.1 el diagrama de Bode en amplitud.

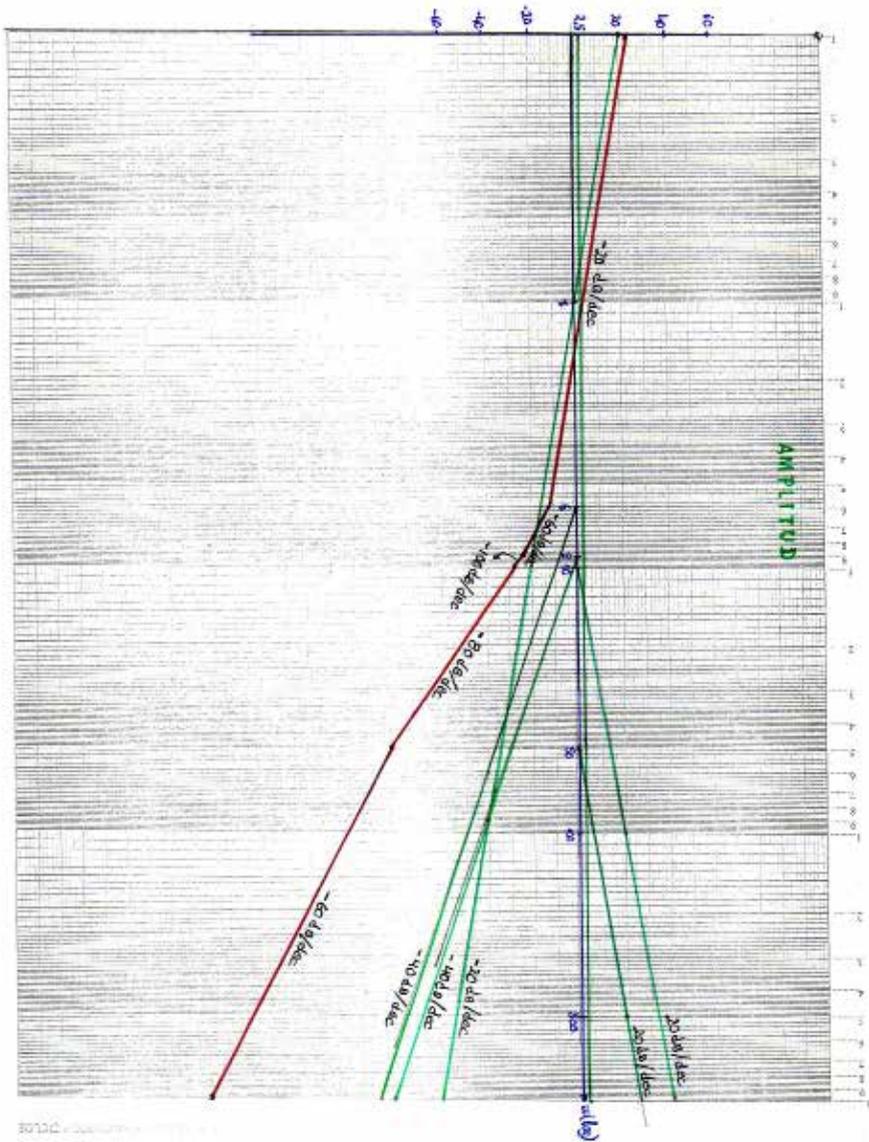


Figura 7.1 Diagrama de Bode en amplitud (Problema 2)

**Problema 3:** con la función de transferencia  $H(s)$  preparada en el problema 1, se procede a graficar en la figura 7.2 el diagrama de Bode en fase.

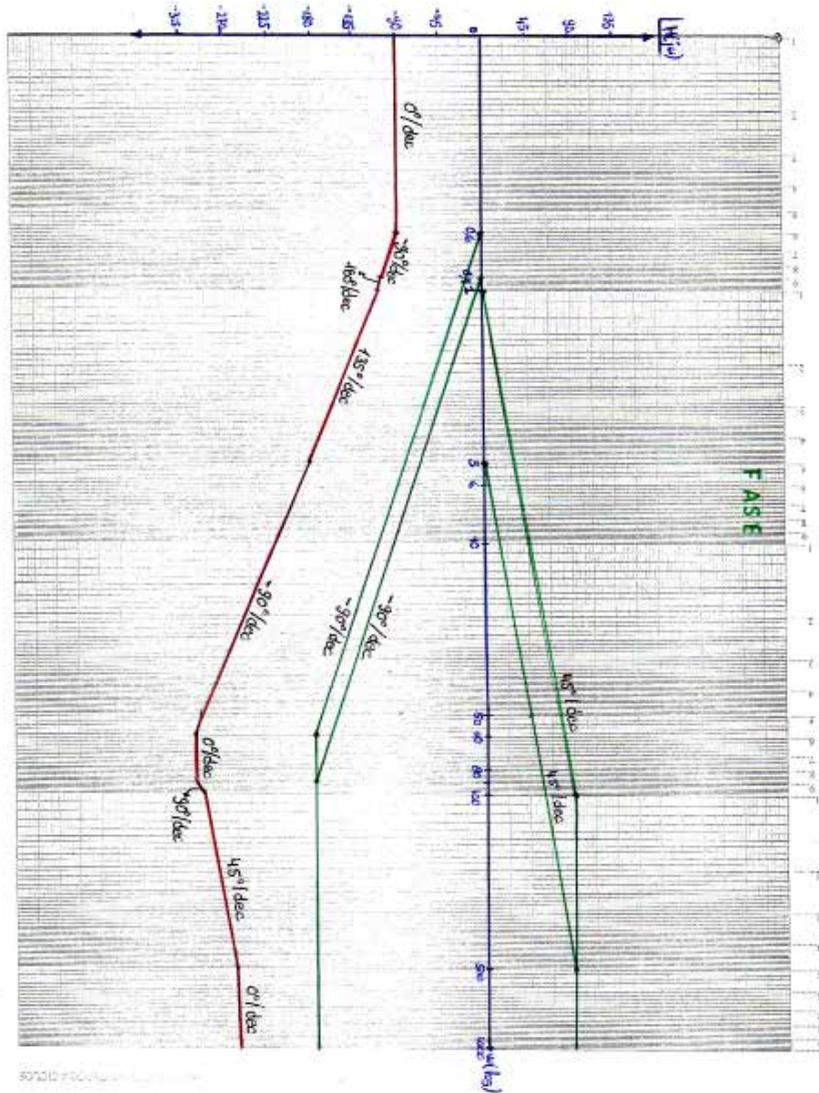


Figura 7.2 Diagrama de Bode en fase (Problema 3)

**Problema 4:** con la función de transferencia  $H(s)$ , preparar la función para poder graficar.

*Solución:*

$$H(s) = \frac{60(9s + 90)(s + 60)}{s(12s^2 + 75s + 384)(4s + 28)^2}$$

$$H(s) = \frac{60(9)(s + 10)(s + 60)}{12s(s^2 + 6.25s + 32)(4)^2(s + 7)^2}$$

$$H(s) = \frac{540(10)(60) \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{60} + 1\right)}{9408(s)(32) \left(\frac{s^2}{32} + \frac{6.25}{32}s + 1\right) \left(\frac{s}{7} + 1\right)^2}$$

$$H(s) = \frac{324000 \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{60+1}\right)}{301056s \left[\left(\frac{s}{5.66}\right)^2 + 1.10 \frac{s}{5.66} + 1\right] \left(\frac{s}{7} + 1\right)^2}$$

$$H(s) = \frac{1.08 \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{60} + 1\right)}{s \left[\left(\frac{s}{5.6}\right)^2 + 1.10 \left(\frac{s}{5.6}\right) + 1\right] \left(\frac{s}{7} + 1\right)^2}$$

$$\left(\frac{s}{w}\right)^2 + 2\zeta \frac{s}{w} + 1 = 0$$

$$\left(\frac{s}{\sqrt{32}}\right)^2 + \frac{6.25}{\sqrt{32}} \left(\frac{s}{\sqrt{32}}\right) + 1 = 0$$

$$\left(\frac{s}{5.6}\right)^2 + 1.10 \left(\frac{s}{5.6}\right) + 1 = 0$$

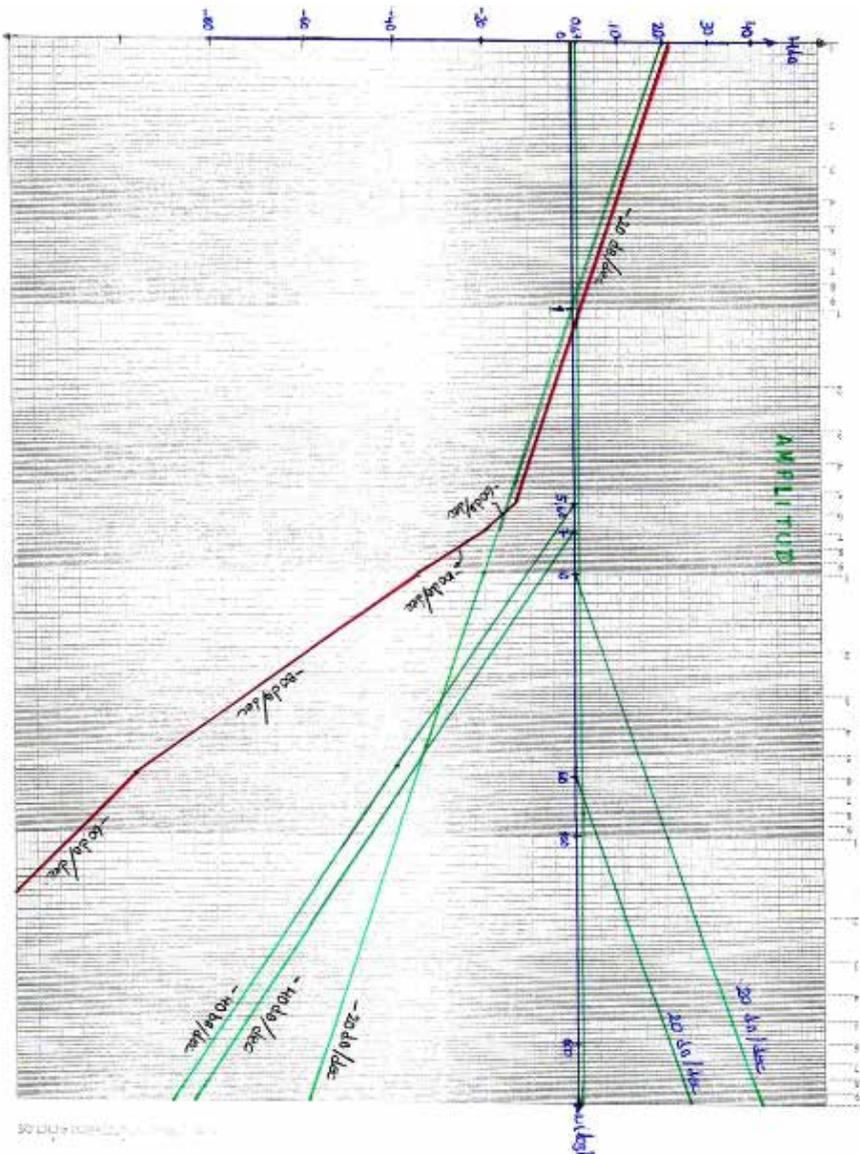
$$2\zeta = 1.10$$

$$\zeta = 0.55$$

$$\text{HdB} = 20\log(1.08)$$

$$\text{HdB} = 0.67\text{dB}$$

**Problema 5:** con la función de transferencia  $H(s)$  preparada en el problema 4, se procede a graficar en la figura 7.3 el diagrama de Bode en amplitud



**Figura 7.3** Diagrama de Bode en amplitud (Problema 5)

**Problema 6:** con la función de transferencia  $H(s)$  preparada en el problema 4, se procede a graficar en la figura 7.4 el diagrama de Bode en fase.

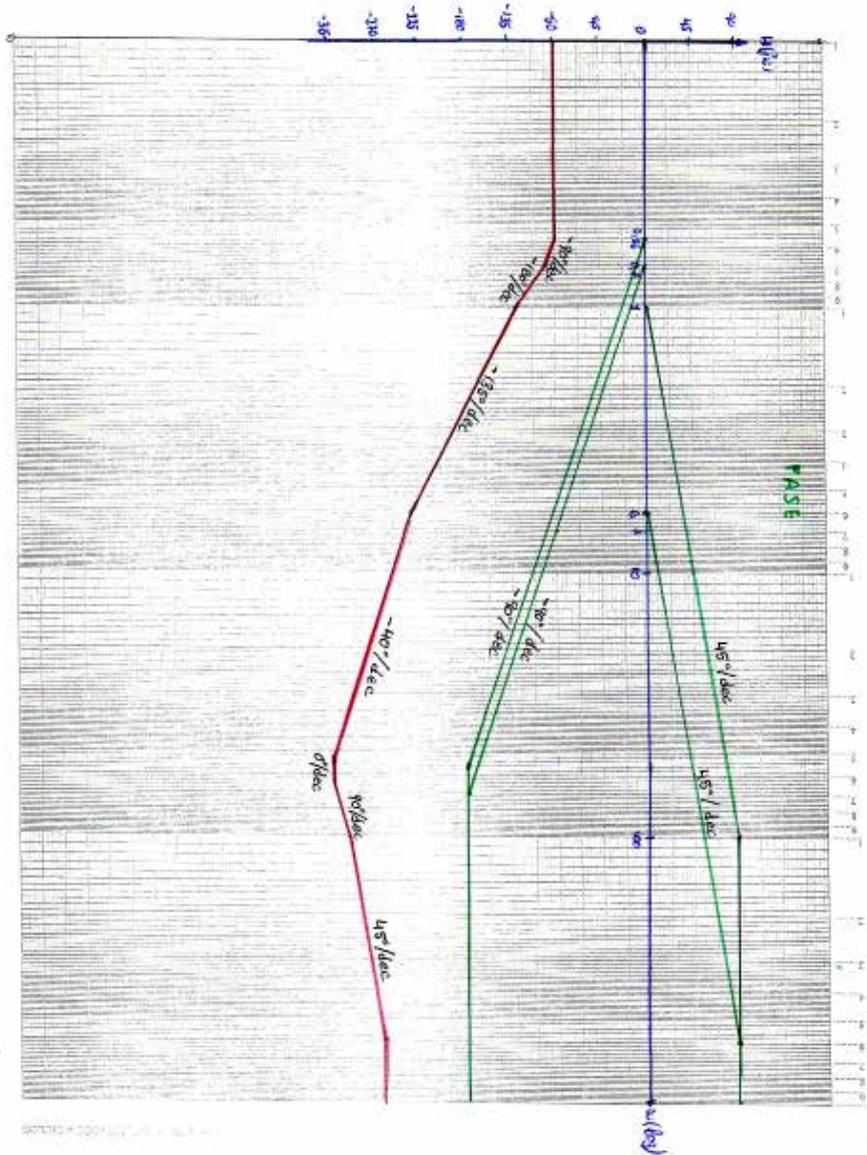


Figura 7.4 Diagrama de Bode en fase (Problema 6)

**Problema 7:** con la función de transferencia  $H(s)$ , preparar la función para poder graficar.

*Solución:*

$$H(s) = \frac{42000s(6s + 48)}{(s + 30)^2(42s^2 + 70s + 15)(20s + 100)}$$

$$H(s) = \frac{42000s(48) \left(\frac{6s}{48} + 1\right)}{900 \left(\frac{s}{30} + 1\right)^2 15 \left(\frac{42s^2}{15} + \frac{70s}{15} + 1\right) 100 \left(\frac{20s}{100} + 1\right)}$$

$$H(s) = \frac{2016000s \left(\frac{s}{8} + 1\right)}{1350000 \left(\frac{s}{30} + 1\right)^2 \left[ \left(\frac{s}{\sqrt{\frac{15}{42}}}\right)^2 + \frac{70s\sqrt{\frac{15}{42}}}{15\sqrt{\frac{15}{42}}} + 1 \right] \left(\frac{s}{5} + 1\right)}$$

$$H(s) = \frac{1.49s \left(\frac{s}{8} + 1\right)}{\left(\frac{s}{30} + 1\right)^2 \left[ \left(\frac{s}{0.6}\right)^2 + 2.78 \left(\frac{s}{0.6}\right) + 1 \right] \left(\frac{s}{5} + 1\right)}$$

$$\text{HdB} = 20\log(1.49)$$

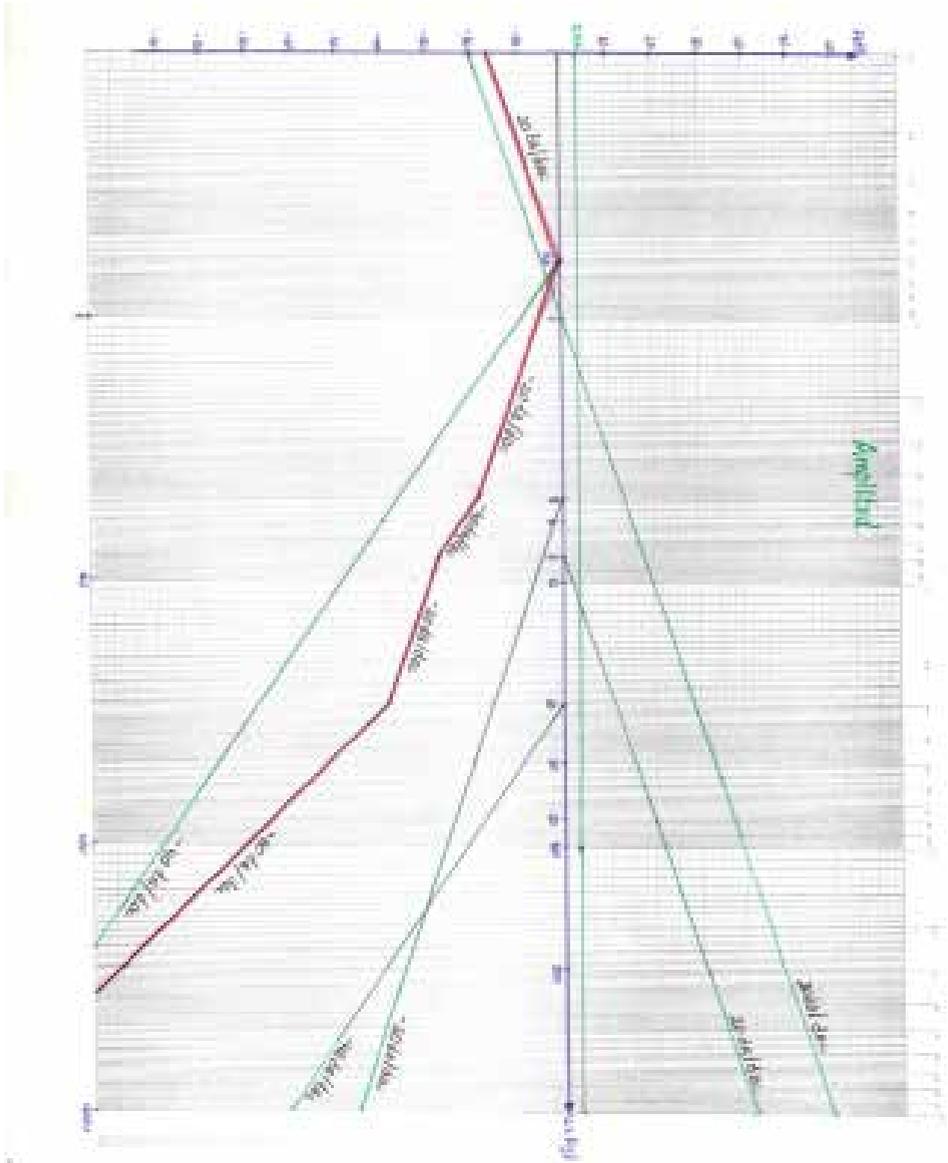
$$\text{HdB} = 3,46$$

$$2\zeta = \frac{70\sqrt{\frac{15}{42}}}{15}$$

$$2\zeta = 2.78$$

$$\zeta = 1.39$$

**Problema 8:** con la función de transferencia  $H(s)$  preparada en el problema 7, se procede a graficar en la figura 7.5 el diagrama de Bode en amplitud.



**Figura 7.5** Diagrama de Bode en amplitud (Problema 8)

**Problema 9:** con la función de transferencia  $H(s)$  preparada en el problema 7, se procede a graficar en la figura 7.6 el diagrama de Bode en fase.

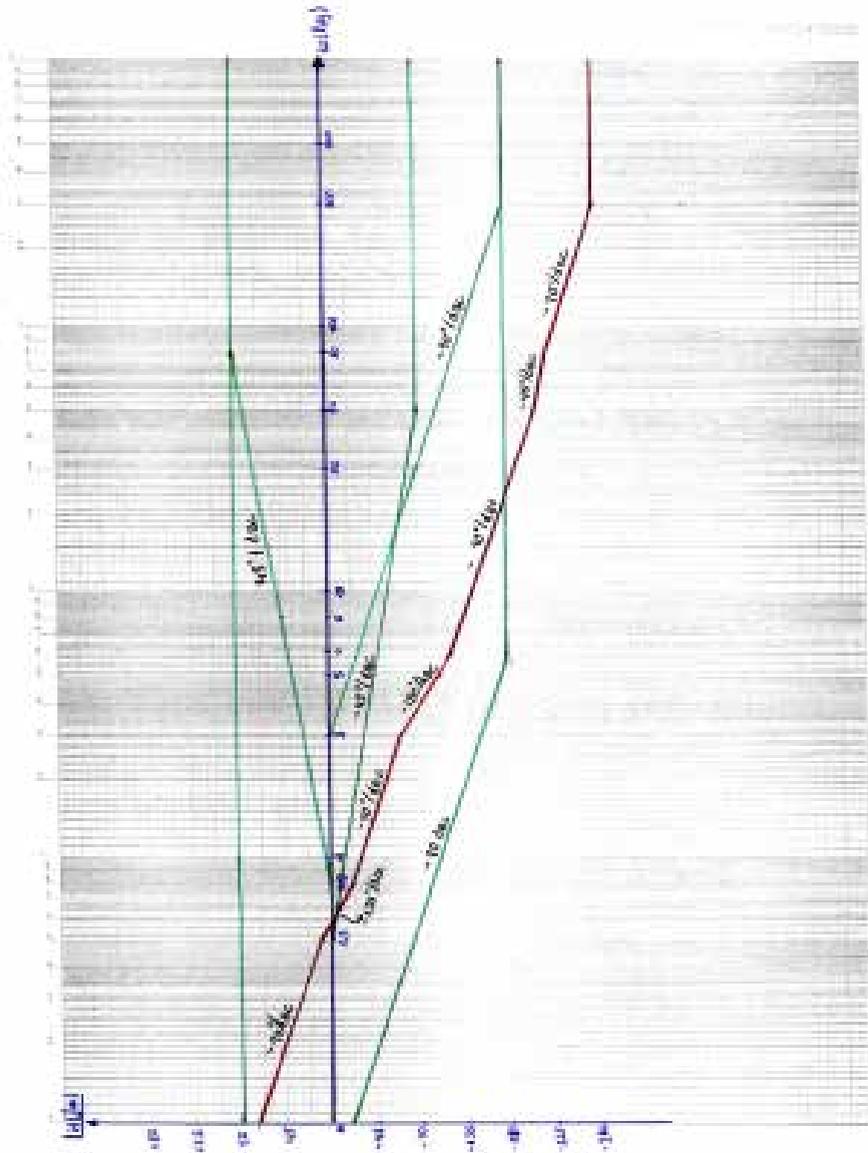


Figura 7.6 Diagrama de Bode en fase (Problema 9)





## BIBLIOGRAFÍA

Hayt Jr., W.H., y Kemmerly, J. E. (1988). *Análisis de circuitos en ingeniería* (4ª. ed.). México: Mc Graw-Hill.

Van Valkenburg, M. E. (1980). *Análisis de redes*. México: Limusa.

Edminister, J.A. (1988). *Circuitos eléctricos* (2a ed.). México: Mc Graw Hill.

Hayt, W. H. Jr., Kemmerly, J. E. y Durbin, S. M. (2003). *Análisis de circuitos en ingeniería* (6ª ed.). México: McGraw-Hill.

Chapman, S. J. (1993). *Máquinas eléctricas* (2a. ed.). Colombia: Mc Graw-Hill.

Hayt Jr, W.H., Kemmerly, J. y Durbin, S. (2012). *Análisis de circuitos en ingeniería* (8a ed.). México: Mc Graw-Hill.

Dorf, R. C. y Svoboda, J. A. (2011). *Circuitos eléctricos* (8a ed.). México: Alfaomega.

Salas, S. L. y Hille, E. (1976). *CALCULUS de una y varias variables con Geometría analítica*. España: Reverté.

Alexander, CH. K. y Sadiku, M. N. O. (2006). *Fundamentos de circuitos eléctricos* (3a ed.). México: Mc Graw-Hill.



El *Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable y transiente* está dirigido a estudiantes que tengan conocimientos del sustento teórico de circuitos eléctricos tanto en corriente continua como en corriente alterna, en estado estable y en estado transiente, con fuentes independientes y dependientes; con énfasis en las leyes de Kirchhoff y de Ohm, teoremas de Thévenin y Norton, principio de linealidad y superposición, divisores de corriente y de voltaje, transformaciones de fuentes, funciones de transferencia, gráficas de polos y ceros, y diagramas de Bode. Además, deben tener conocimientos de cálculo diferencial e integral, álgebra, números complejos, trigonometría, resolución de circuitos eléctricos en estado estable y transformación de Laplace. Estas leyes son fundamentales para el aprendizaje, de tal forma que las puedan aplicar en la resolución de los problemas de circuitos eléctricos en estado transiente, con el único propósito de ayudar a los estudiantes a adquirir habilidades en el desarrollo de ejercicios eléctricos. Los problemas desarrollados en su mayoría son los planteados en el libro *Análisis de circuitos en ingeniería*, cuarta edición, de los autores William H. Hayt, Jr. y Jack E. Kemmerly, y están fundamentados en sus contenidos teóricos. Por ello, esta publicación es una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para los estudiantes.

**Pedro Infante Moreira** nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.

ISBN: 978-9942-14-322-8



9 789942 143228

